Abhandlung

von der

Epicycloide

als

Anhang zum mathematischen Lehrbuche

III. Theils II. Abtheilung.

Für die Besitzer der ersten Ausgabe.

Verfaßt

von

Maurus Magold,

königl. b. geistl. Rathe und öffentl. ordentl. Professor der Mathematik zu Landshut.

Landshut
in der Weber'schen Buchhandlung
1813.

Lehrbuch
der
höhern Geometrie
zum Gebrauche
öffentlicher Vorlesungen
auf der
königl. baierischen Universität in Landshut,

verfaßt vom
Maurus Magold,
königl. geistl. Rathe und öffentl. ordentl. Professor
der Mathematik allda.

Nebst
Herrn v. Voiths Oberst-Bergrathes Vorschlägen
zur Vervollkommnung der Markscheidekstunst und dessen Tabellen der Seigerteufen und Sohlen.

Mit 5 Kupfern Nro. VII. und XI., und 4 gedruckten Tabellen Nro. V. — VIII. zur höheren Geometrie, und 7 Kupfertafeln zur H. v. Voiths Abhandlung.

Zweyte vermehrte Ausgabe.

Landshut
in der Weberschen Buchhandlung.
1813.

Vorrede
zur zweyten Ausgabe.

Die zur Mechanik nothwendigen Lehrsätze von den Epicycloiden wollte ich anfänglich an den gehörigen Stellen im zweyten Bande der Mechanik fester Körper einschalten, oder als eine besondere Abhandlung herausgeben; allein ersteres mißfiel mir zum Theil als eine Vermischung der reinen und angewandten Mathematik an sich schon, und zum Theil erlaubte es auch der nothwendige Raum nicht mehr; letzteres fand ich nicht räthlich, weil eine einzelne Abhandlung leicht vom Lehrbuche, wozu sie doch wesentlich gehört, ge-

trennt

trennt werden könnte: ich entschloß mich also diese Abhandlung der höhern Geometrie als den IVten Abschnitt des IIIten Hauptstückes zur Ergänzung beyzufügen, und die durch diese Vermehrung nothwendige Anzeige unter dem Titel: einer neuen Ausgabe der höhern Geometrie, dem Publico mitzutheilen.

Um den Besitzern der erstern Ausgabe keine unnützen Kösten zu verursachen, wird denselben auf Verlangen diese Zugabe über die Epicycloide einzeln nebst den veränderten Titeln, und Inhaltsverzeichniß zugesendet.

Daß ich bey der Epicycloide H. Eytelweins Handbuch der Statik fester Körper III. Band vorzüglich benutzt habe, erinnere ich um so lieber, als ich dadurch Gelegenheit habe, dem vortrefflichen Verfasser meine Hochachtung öffentlich zubezeugen.

Landshut den 9. October 1812.

Magold.

Inhalt.

Die höhere Geometrie.

Seite.

I. Hauptstück. Von krummen Linien überhaupt. 417

I. Abschnitt. Von der Beschaffenheit krummer Linien, und ihrer Abscissen und Ordinaten. 417

II. Abschnitt. Von trigonometrischen Differentialen, und von der Integration durch Kreisbögen. 427

III. Abschnitt. Von den Verhälnissen krummer Linien überhaupt. 460

II. Hauptstück. Von Kegelschnitten. . . 484

I. Abschnitt. Von Kegelschnitten überhaupt. 484

II. Abschnitt. Von der Parabel. . . 488

III. Abschnitt. Von der Ellipse. . . . 513

IV. Abschnitt. Von der Hyperbel. . . 566

V. Abschnitt. Vom Kreise. 607

Seite.

III. Hauptstück. Von höhern algebraischen, und transcendenten Linien. 627

I. Abschnitt. Von der Cissoid und Conchoid. 627

II. Abschnitt. Von der Quadratrix und Schneckenlinie. 639

III. Abschnitt. Von der Cycloide oder Radlinie. 645

IV. Abschnitt. Von der Epicycloide. . . . 661

Vorschläge zur Vervollkommnung der Markscheider Instrumente vom Ignaz Voith.

Markscheidertabellen der Seigerteufen und Sohlen, so wie der Breiten und Längen nach dem Decimalsystem in 0, 1 Theilen einer Prim.

IV. Abschnitt.

Von der Epicycloide.

§. 358.

Erklärungen: (Fig. 111 u. 1 2.)

a) Wenn sich von zweyen Kreisen, welche in eben derselben Ebene liegen, der eine BHTB auf dem Umfange BDR des andern fortwälzet, so heißt die Curve BFVI, welche ein Punct B am Umfange des erstern dadurch beschreibt, eine Epicycloide, und zwar

α) eine äussere oder Epicycloide im engern Sinne (Fig. 111.), wenn sich der Kreis BHTB auf der äussern oder erhabenen Seite des Kreisbogens BDR fortwälzet,

β) eine innere oder Hypocycloide (Fig. 112.), wenn die Fortwälzung auf der innern hohlen Seite des Bogens Statt hat.

b) Der Kreis BHTB heißt der wälzende, oder erzeugende Kreis, und der Punct B am Umfange desselben, welcher die Epicycloide beschreibt, der beschreibende Punct, und

c) der unbewegliche Kreis, auf dessen Peripherie sich der vorhergehende wälzet, der Grundkreis oder die Basis.

I. Zusatz: Stellet man sich den Halbmesser der Basis als unendlich vor, so wird die Basis eine gerade Linie (Geometr. §. 111. IV. Zus.) und die Epicycloide geht in die Cycloide über (§. 348).

II. Zusatz: Wenn sich der erzeugende Kreis von B bis D fortwälzet, und dadurch der beschreibende Punct B das Stück BF der Epicycloide beschreibt, so ist jedesmal der Bogen DF des Erzeugungskreises, dem Bogen BD der Basis gleich, denn da sich ersterer Kreis von B bis D fortwälzet, so ist's gerade, als hätte sich vom erstern Kreise das Stück FD ab- und an dem Bogen BD der Basis aufgewickelt.

III. Zusatz: Wenn daher der beschreibende Punct des Erzeugungskreises die Basis anfänglich in B berührt, und die Fortwälzung von B bis D erfolgt, und man nimmt den Bogen DF am Erzeugungskreise = DB an der Basis, so ist F ein Punct der Epicycloide.

IV. Zusatz: Wenn der Erzeugungskreis auf der Basis den Bogen BDRI, welcher seiner Peripherie gleich ist, hinterlegt hat, so bekömmt der Punct B seine Stelle in I, mithin seine anfängliche Lage wieder, folglich ist die Epicycloide vollendet; denn setzet der Erzeugungskreis seine

Be-

Bewegung fort, so beschreibt B eine der vorigen congruente neue Epicycloide, wiederholt also immer dieselbe Curve.

V. Zusatz: Wenn die Bögen BD, DF an den beyden Kreisen einander gleich sind, so verhalten sich ihre entsprechenden Centriwinkel BAD, DEF umgekehrt wie die Radien ihrer Kreise; denn nach (Geom. §. 65. I. Zus.) ist

$$BAD : 360° = \text{arc. } BD : 2\, AB.\pi$$

$$DEF : 360° = \text{arc. } DF : 2\, ED.\pi$$

sind nun die Bögen BD und DF gleich, so ist (Arithm. §. 218. III.)

$$BAD : DEF = ED : AB, \text{ und}$$

$$BAD = \frac{ED}{AB}\, DEF$$

VI. Zusatz: Wenn sich die beyden Centriwinkel des Grund- und Erzeugungskreises umgekehrt wie ihre Halbmesser verhalten, so sind die entsprechenden Bögen beyder Kreise einander gleich; denn

$$\text{arc. } BD = \frac{BAD}{360°}\, 2\, AB\pi, \text{ und}$$

$$\text{arc. } DF = \frac{DEF}{360°}\, 2\, ED\pi \text{ (V. Zus.)}$$

ist nun $BAD : DEF = ED : AB$, also

$BAD.\, AB = DEF.\, ED$, so ist offenbar arc. BD = arc. DF.

VII. Zusatz: Nimmt man daher die Centriwinkel so, daß $BAD = \frac{ED}{AB} DEF$, so ist arc. BD = arc. DF und umgekehrt.

§. 359.

Aufgabe: (Fig. 111 u. 112.)

Der erzeugende Kreis berühret in B, dem Anfangspuncte einer äussern, oder innern Epicycloide, die Basis, und in dem Durchmesser BT des erstern Kreises ist ein beliebiger Punct M, mithin auch dessen Entfernung AM vom Mittelpunct A der Basis gegeben, man suchet für beyde Epicycloiden den Punct F, welcher die nemliche Entfernung hat, so daß AF = AM ist.

Auflösung:

1. Man ziehe den Halbmesser AB der Basis, so fällt er mit BT in eine gerade Linie (Geom. §. 111. 1. Zus.) mithin liegt M in dieser Linie.
2. Nun beschreibe man aus A mit AM den Kreisbogen Mμ, welcher die Peripherie des Erzeugungskreises in einem Puncte H schneidet, zieht man also
3. den Halbmesser CH, so ist der Centriwinkel BCH bestimmt.

4. Fer=

4. Ferner verzeichne man den Centriwinkel
$$\text{BAD} = \frac{\text{CB}}{\text{AD}}\ \text{BCH},$$ so ist der Bogen BD = dem Bogen BH (§. 358. VII. Zus.)

5. Der Halbmesser AD (Fig. 112.) oder seine Verlängerung (Fig. 111.) schneidet den Bogen Mμ (No. 2.) in dem Puncte N.

6. Nimmt man nun auf diesem Bogen die Länge NF = MH, so ist F der gesuchte Punct der beyden Epicycloiden.

Beweis:

7. Man verzeichne den Erzeugungskreis, welcher die Basis in D berührt (Geometr. §. 112.), und ziehe in demselben den Durchmesser DG, so fällt dieser mit AD in eine gerade Linie (Geom. §. 111. I. Zus.)

8. Aus dem Mittelpuncte E dieses Kreises ziehe man die gerade Linie EF, und

9. aus dem Mittelpuncte A der Basis die geraden Linien AH, AF, so ist

10. AM = AH = AF = AN (Nr. 2.), folglich

11) liegt F in der verlangten Entfernung AM.

12. Ferner ist: AC = AB $\pm$ BC = AE, und der Winkel CAH = FAN (Nr. 6.) mithin

13. ΔCAH $\cong$ ΔEAF, also

14. Der Winkel AEF=ACH, oder DEF=BCH, und
15. EF = CH, das ist, der Punct F ist vom Mittelpunct E um den Halbmesser entfernt, und liegt also in der Peripherie des über D stehenden Erzeugungskreises.
16. Ferner da DEF = BCH (Nr. 14.) so ist arc. DF = arc. BH = arc. BD (Nr. 4.) folglich
17. liegt der Punct F in den beyden Epicycloiden (§. 358. III Zus.) in der gegebenen Entfernung (Nr. 11.) und ist also der gesuchte.

I. Zusatz: Berührt der Erzeugungskreis die Basis auf ihrer äussern oder innern Seite ihres Umfanges, in B, und man nimmt auf den beyden Kreisen die beliebigen aber gleichen Bögen BH = BD, beschreibt aus A mit AH einen Kreisbogen Mμ, ziehet nach B, D die geraden Linien AM, AN, welche den Kreisbogen in den Puncten M, N schneiden. Nimmt endlich auf diesem Kreisbogen NF = MH, so ist F ein Punct einer Epicycloide, welche der Punct B beschreibt, indem sich der Erzeugungskreis von B gegen D zu wälzet.

II. Zusatz Eben so: Berühret der Erzeugungskreis die Basis in I, und man nimmt auf beyden Kreisen die beliebigen Bögen Iα = IL, Iβ = IO

u. s. w.

u. s. w. zieht aus A mit Aα, Aβ Kreisbögen, und von A nach I, L, O gerade Linien, so daß AI die Bögen in a und b schneidet, die Linie AL den mit Aα gezogenen Bogen in l, und die Linie AO den mit Aβ gezogenen Bogen in o schneidet, nimmt endlich auf diesen Kreisbögen ls = aα, ot = bβ, so liegen die Puncte s, t in einer Epicycloide, welche der Punct I beschreibt, wenn sich der erzeugende Kreis auf der Basis von I gegen LOP zu wälzet.

§. 360.

Aufgabe: (Fig. 111. u. 112.)

Aus den gegebenen Halbmessern AI, CI der Basis und des Erzeugungskreises eine äussere oder innere Epicycloide zubeschreiben.

Auflösung:

1. Man verzeichne mit AI die Grundkreise für die beyden Epicycloiden, und
2. Man wähle den beliebigen Punct I an der Basis, und verzeichne aus CI den Erzeugungskreis, welcher in I die Basis für die äussere Epicycloide auf der erhabenen Seite (Fig. 111.), und für die innere Epicycloide auf der hohlen Seite (Fig. 112.) berührt. (Geom. §. 112.)

3. Für

3. Für den Halbkreis ist der Centriwinkel = 180°, verzeichnet man nun im Grundkreise den Centriwinkel

$IAR = \frac{CI}{AI}\, 180°$, so ist der Bogen IR des

Grundkreises der halben Peripherie IK des Erzeugungskreises gleich. (§. 358. VII. Zus.)

4. Man theile daher diese beyden Bögen IK, IR in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, so daß $I\alpha = IL$, $I\beta = IO$, $I\gamma = IP$, $I\delta = IQ$, $IK = IR$.

5. Nun ziehe man aus A mit $A\alpha$, $A\beta$, $A\gamma$, $A\delta$, AK concentrische Kreisbögen, welche den Durchmesser IK des Erzeugungkreises in a, b, c, d, K schneiden.

6. Ferner ziehe man die geraden Linien AL, AO, AP, AQ, AR, bis erstere den Kreisbogen $a\alpha$ in l, die zweyte den Bogen $b\beta$ in o, die dritte den Bogen $c\gamma$ in p, die vierte den Bogen $d\delta$ in q, und die letzte den Bogen Kr in r schneidet.

7. Nimmt man endlich auf dem Bogen al, die Länge $ls = a\alpha$, auf dem Bogen bo die Länge $ot = b\beta$, auf dem Bogen cp die Länge $pu = c\gamma$, auf dem Bogen dq die Länge $qw = d\delta$, so liegen

8. die Puncte I, s, t, u, w sämtlich in einer innern oder äussern Epicycloide, je nachdem sich

der

der Kreis auf der hohlen oder erhabenen Seite der Basis von I gegen R zu wälzet (§. 359. II. Zus.)

9. Da bey K der Bogen Kr mit dem Erzeugungskreise nur den Berührungspunct K gemein hat, so fällt auch der Punct r unmittelbar mit einem Puncte der Epicycloide zusammen.

I. Zusatz: Je größer die Anzahl der Theile Nr. 4. ist, desto mehrere Puncte der Epicycloide werden dadurch bestimmt.

II. Zusatz: Auf ähnliche Art läßt sich eine Cycloide verzeichnen, nun verwandeln sich Nr. 5. die Bögen in gerade Linien, die zur Basis parallel, und Nr. 6. stehen die Linien auf eben dieser Basis alle senkrecht. (§. 358. I. Zus.)

Anmerkung: Die mechanische Construction einer äussern, oder innern Epicycloide folgt unmittelbar aus der Erklärung §. 358. dieser Linien.

§. 361.

Lehrsatz: (Fig. 113.)

Wenn für den beliebigen Punct M einer äussern Epicycloide BVI der Erzeugungskreis die Basis in D berühret, und man vom Mittelpuncte A der Basis die geraden Linien AB, AM, AD zieht, nimmt erstere

zur

zur Abscissenlinie, und fällt von M auf sie die rechtwinklichte Ordinate MP, zieht ferner im Erzeugungskreise durch den Berührungspunct D den Diameter DG, und den Halbmesser CM, und setzet die Halbmesser von der Basis und dem Erzeugungskreise, und zwar erstern oder AB = a, den zweyten CD = b, die Centriwinkel BAD = ψ, MCD = ϕ, ferner die Absciſſe AP = x, die Ordinate MP = y, und den Abstand des Punctes M vom Mittelpuncte der Basis, oder AM = z, so ist:

$$x = (a + b) \cos. \psi - b \cos. (\phi + \psi)$$

$$y = (a + b) \sin. \psi - b \sin. (\phi + \psi)$$

$$z^2 = (a + b)^2 + b^2 - 2b (a + b) \cos. \phi$$

Beweis:

1. Der Diameter DG des Erzeugungskreises fällt mit dem Halbmesser AD der Basis in eine gerade Linie (Geometr. §. 111. I. Zus.)
2. Man fälle nun aus C auf die Abcissenlinie AP den Perpendikel CO, und von M auf letztere die senkrechte MQ, so ist CO ‡ MP, und MQ ‡ PO, folglich
3. MP = QO, und MQ = PO (Geom. §. 45. IV. Zus.)
4. Im rechtwinklichten Dreyecke AOC ist der Winkel ACO = 90° − OAC = 90° − BAD = 90° − ψ

5. Im

5. Im Dreyecke MCQ ist der genannte Winkel
$MCQ = MCD - QCD = MCD - ACO$
$= \phi - (90^\circ - \psi)$ (Nr. 4.) $= \phi + \psi - 90^\circ$,
mithin

6. $\sin. MCQ = - \cos. (\phi + \psi)$, und
$\cos. MCQ = \sin. (\phi + \psi)$

7. Ferner ist im rechtwinklichten Dreyeck CQM:
$MC : MQ = 1 : \sin. MCQ$, und
$MC : CQ = 1 : \cos. MCQ$, oder
$b : MQ = 1 : - \cos. (\phi + \psi)$, und
$b : CQ = 1 : \sin. (\phi + \psi)$, also

8. $MQ = - b \cos. (\phi + \psi)$, und
$CQ = b \sin. (\phi + \psi)$

9. Im rechtwinklichten Dreyecke AOC ist ebenfalls
$AC : CO = 1 : \sin. CAO$, und
$AC : AO = 1 : \cos. CAO$, oder
$a + b : CO = 1 : \sin. \psi$, und
$a + b : AO = 1 : \cos. \psi$, also

10. $CO = (a + b) \sin. \psi$, und
$AO = (a + b) \cos \psi$

11. Nun ist $AP = AO + OP = AO + MQ$ (Nr. 3.), das ist

12. $x = (a + b) \cos. \psi - b \cos. (\phi + \psi)$
(Nr. 8. u. 10.)

13. $MP = OQ$ (Nr. 3.) $= CO - CQ$, das ist:

14. $y = (a + b) \sin. \psi - b \sin. (\phi + \psi)$ (Nr. 8. u. 10.)

15. $x^2 = (a + b)^2 \cos. \psi^2 - 2 b (a + b) \cos. \psi \cos. (\phi + \psi) + b^2 \cos. (\phi + \psi)^2$

$y^2 = (a+b)^2 \sin. \psi^2 - 2b(a+b) \sin. \psi \sin. (\phi + \psi) + b^2 \sin. (\phi + \psi)^2$: also

16. $z^2 = x^2 + y^2 = (a + b)^2 - 2 b (a + b) [\cos. \psi \cos. (\phi + \psi) + \sin. \psi \sin. (\phi + \psi)] + b^2 = (a + b)^2 + b^2 - 2 b (a + b) \cos. \phi$ (Trigon. §. 309. IV. Zus.)

17. wodurch nebst N. 12 u. 14 der Lehrsatz erwiesen ist.

I. Zusatz. Weil allemal der Bogen BD = dem Bogen DM ist (§. 358. II. Zus.) so ist $\phi : \psi = a : b$ (§. 358. V. Zus.) mithin

$$\psi = \frac{b}{a} \phi, \quad d\psi = \frac{b}{a} d\phi$$

II. Zusatz. $x = (a+b) \cos. \psi - b \cos. (\phi + \psi)$ (N. 12) also

$dx = -(a + b) \sin. \psi d \psi + b \sin. (\phi + \psi) (d \phi + d \psi)$ (§. 236.)

$= -(a + b) \sin. \psi . \frac{b}{a} d \phi + b \sin. (\phi + \psi) (1 + \frac{b}{a}) d \phi$ (I. Zus.)

$= - \frac{b (a + b)}{a} d \phi [\sin. \psi - \sin. (\phi + \psi)]$

III.

III. Zusatz: $y = (a+b)\sin.\psi - b\sin.(\phi+\psi)$ (Nr. 14.) also

$$dy = (a+b)\cos.\psi d\psi - b\cos.(\phi+\psi)(d\phi+d\psi)$$

$$= (a+b)\cos.\psi \frac{b}{a} d\phi - b\cos.(\phi+\psi)(1+\frac{b}{a}) d\phi$$

$$= \frac{b(a+b)}{a}\cos.\psi d\phi - \frac{b(a+b)}{a}\cos.(\phi+\psi) d\phi$$

$$= \frac{b(a+b)}{a} d\phi [\cos.\psi - \cos.(\phi+\psi)]$$

IV. Zusatz: $z^2 = (a+b)^2 + b^2 - 2b(a+b)\cos.\phi$ (Nr. 16.) mithin

$2zdz = 2b(a+b)\sin.\phi d\phi$ und

$$dz = \frac{b(a+b)\sin.\phi d\phi}{z}$$

$$= \frac{2b(a+b)\sin.\tfrac{1}{2}\phi\cos.\tfrac{1}{2}\phi d\phi}{z}$$ (Trigon. §. 306. II. Zus.)

V. Zusatz: $dx^2 = \frac{b^2(a+b)^2}{a^2} d\phi^2 [\sin.\psi^2 - 2\sin.\psi\sin.(\phi+\psi) + \sin.(\phi+\psi)^2]$

$dy^2 = \frac{b^2(a+b)^2}{a^2} d\phi^2 [\cos.\psi^2 - 2\cos.\psi\cos.(\phi+\psi) + \cos.(\phi+\psi)^2]$ also

$dx^2 + dy^2 = \frac{b^2(a+b)^2}{a^2} d\phi^2 [1 - 2\cos.\phi + 1]$ (Trigon. §. 309. IV. Zus.)

$$= \frac{2b^2(a+b)^2}{a^2} d\phi^2 [1 - \cos.\phi]$$

=

$$= \frac{2b^2 (a+b)^2}{a^2} d\phi^2 2 \sin.\tfrac{1}{2}\phi^2$$ (Trigon. §. 308. III. Zus.)

$$= \frac{4b^2 (a+b)^2}{a^2} \sin.\tfrac{1}{2}\phi^2 d\phi^2$$

§. 362.

Lehrsatz: (Fig. 114.)

Wenn für die innere Epicycloide alle Bestimmungen, wie bey der äussern im vorhergehenden §. beybehalten werden, so ist:

$$x = (a - b) \cos.\psi + b \cos.(\phi - \psi)$$
$$y = (a - b) \sin.\psi - b \sin.(\phi - \psi)$$
$$z^2 = (a - b)^2 + b^2 + 2b(a - b) \cos.\phi$$

Beweis:

1. Der Durchmesser DG des Erzeugungskreises fällt mit dem Halbmesser AD in eine gerade Linie zusammen (Geometr. §. 111. I. Zus.)
2. Man ziehe aus C auf die Abscissenlinie AB die senkrechte CO, und auf letztere aus M die senkrechte MQ, so ist CO ⫲ MP, und MQ ⫲ PO, mithin
3. MP = QO, und MQ = PO
4. Im rechtwinklichten Dreyeck AOC ist der Winkel ACO $= 90° - OAC = 90° - BAD$ $= 90° - \psi$, mithin

der

der Winkel DCQ $= 180° - ACO$
$= 180° - (90° - \psi)$
$= 90° + \psi$, und daher

5. $MCQ = MCD - DCQ = \phi - (90° + \psi)$
$= (\phi - \psi) - 90°$, also

6. $\sin. MCQ = -\cos. (\phi - \psi)$, und
$\cos. MCQ = \sin. (\phi - \psi)$

7. Im rechtwinklichten Dreyecke CQM ist:
$CM : MQ = 1 : \sin. MCQ$, und
$CM : CQ = 1 : \cos. MCQ$, das ist:
$b : MQ = 1 : -\cos. (\phi - \psi)$, und
$b : CQ = 1 : \sin. (\phi - \psi)$, mithin

8. $MQ = - b \cos. (\phi - \psi)$, und
$CQ = b \sin. (\phi - \psi)$

9. Im rechtwinklichten Dreyeck AOC ist ebenfalls
$AC : CO = 1 : \sin. CAO$, und $AC : AO = 1 : \cos CAO$, das ist:
$a - b : CO = 1 : \sin. \psi$, und $a - b : AO = 1 : \cos. \psi$, mithin

10. $CO = (a - b) \sin. \psi$, und
$AO = (a - b) \cos. \psi$

11. Nun ist $AP = AO - OP = AO - MQ$ (Nr. 3.) also

12. $x = (a - b) \cos. \psi + b \cos. (\phi - \psi)$ (Nr. 8. u. 10.)

13. $MP = OQ$ (Nr. 3.) $= CO - CQ$, folglich

14. $y = (a - b) \sin. \psi - b \sin. (\phi - \psi)$
(Nr. 8. u. 10.)

15. $x^2 = (a - b^2) \cos. \psi^2$
$+ 2b(a - b) \cos. \psi \cos. (\phi - \psi)$
$+ b^2 \cos. (\phi - \psi)^2$
$y^2 = (a - b^2) \sin. \psi^2 - 2b(a - b) \sin. \psi \sin. (\phi - \psi)$
$+ b^2 \sin. (\phi - \psi)^2$, also

16. $z^2 = x^2 + y^2 = (a - b)^2 + b^2$
$+ 2b(a - b) [\cos. \psi \cos. (\phi - \psi) - \sin. \psi \sin. (\phi - \psi)]$
$= (a - b^2) + b^2 + 2b(a - b) \cos. \phi$
(Trig. §. 309. IV. Zus.)

17. Durch Nr. 12, 14 u. 16. ist der Lehrsatz erwiesen.

I. Zusatz: Bey der innern Epicycloide ist ebenfalls der Bogen BD der Basis allemal dem Bogen DM des Erzeugungskreises gleich (§. 358. II. Zus.) mithin $\phi : \psi = a : b$, also $b \phi = a \psi$

II. Zusatz: Wenn der Halbmesser a der Basis noch einmal so groß als der Halbmesser b des Erzeugungskreises, so fällt die innere Epicycloide mit der geraden Linie BA, das ist die halbe innere Epicycloide mit dem Halbmesser der Basis, und die ganze Epicycloide mit dem Diameter zusammen. Denn wenn $a = 2b$, so ist auch $\phi = 2\psi$ (I. Zus.)

(I. Zus.) mithin wenn man diese Werthe in die Gleichungen Nr. 12, 14 u. 16. setzet,

$$x = (2b - b) \cos. \psi + b \cos. (2\psi - \psi)$$
$$= b \cos. \psi + b \cos. \psi$$
$$= 2b \cos. \psi$$
$$y = (2b - b) \sin. \psi - b \sin. (2\psi - \psi)$$
$$= b \sin. \psi - b \sin. \psi$$
$$= 0$$

das ist für jeden Werth von x fällt allemal der entsprechende Punct M in die Abscissenlinie AB, ferner

$z^2 = x^2 + y^2 = 4b^2 \cos. \psi^2$ also

$z = 2b \cos. \psi = x$, das ist, die Entfernungen sämtlicher Puncte sind allemal den entsprechenden Abscissen gleich, für $\psi = 0$; ist also $x = z = 2b = a$, das ist der Anfangspunct liegt in B in der Peripherie der Basis; für $\psi = 90°$ oder $\phi = 180°$ wird $x = z = 0$; das ist, der entsprechende Punct derhalben innern Epicycloide fällt in den Mittelpunct der Basis.

III. Zusatz: Sind die Halbmesser der Basis, und des Erzeugungskreises einander gleich, so schwindet die innere Epicycloide in einem Puncte am Umfange der Basis zusammen, denn für $a = b$, ist $a - b = 0$ und $\phi = \psi$, also

$\varphi - \psi = o$ mithin

$x = b$

$y = o$

$z = b$

das ist jeder Punct fällt immer mit B zusammen.

IV. Zusatz: Wenn der Halbmesser der Basis bey der innern oder äussern Epicycloide unendlich ist, so entsteht die Cycloide (§. 358. I. Zus.) mithin ist letztere Linie die gemeinschaftliche Gränze der beyden erstern, der sie sich um so mehr nähern, je größer die Halbmesser ihrer Grundkreise sind.

V. Zusatz: Setzt man den Halbmesser a der Basis bey der innern Epicycloide negativ, so wendet dieselbe die erhabene Seite dem Erzeugungskreise zu, mithin entsteht eine äussere Epicycloide, da aber auch der Centriwinkel BAD eine der vorigen entgegengesetzte Lage erhält, das ist, wenn ψ den hohlen, und ψ^{I} den erhabenen Winkel BAD bezeichnen, der Winkel BAD ist nun auf jener Seite, auf welcher er vorher hohl war, erhaben; so daß $\psi^{I} = 360° - \psi$ ist. Will man also aus den Gleichungen der innern Epicycloide jene der äussern ableiten, so muß Nr. 12, 14, 16. die Größe a negativ, und statt ψ der Winkel

$\psi^{1} = 360^{\circ} - \psi$ gesetzt werden, das ist

$x = -(a+b) \cos. \psi^{1} + b \cos. (\phi - \psi^{1})$

$y = -(a+b) \sin. \psi^{1} - b \sin. (\phi - \psi^{1})$

$z^{2} = (-a-b)^{2} + b^{2} - 2b(a+b) \cos. \phi$

$= (a+b)^{2} + b^{2} - 2b(a+b) \cos. \phi$

VI. Zusatz: Will man statt dem erhabenen Winkel ψ^{1} den spitzigen Winkel ψ setzen, so ist

$\psi^{1} = 360^{\circ} - \psi$, mithin $\sin. \psi^{1} = -\sin. \psi$;

$\cos. \psi^{1} = \cos. \psi$

$\phi - \psi^{1} = \phi - 360^{\circ} + \psi = (\phi + \psi) - 360^{\circ}$, also

$\sin. (\phi - \psi^{1}) = \sin. (\phi + \psi)$;

$\cos. (\phi - \psi^{1}) = \cos. (\phi + \psi)$

Sezet man diese Werthe in die Gleichungen des V. Zus. so wird

$x = -(a+b) \cos. \psi + b \cos. (\phi + \psi)$, oder

$-x = (a+b) \cos. \psi - b \cos. (\phi + \psi)$

$y = (a+b) \sin. \psi - b \sin. (\phi + \psi)$, und für sich schon

$z^{2} = (a+b)^{2} + b^{2} - 2b(a+b) \cos. \phi$

Vergleichet man diese Gleichungen mit jenen §. 361., so sind sie eben dieselben; daß man gegenwärtig x negativ findet, zeigt nur an, daß bey der äussern Epicycloide die Abseissenlinie mit jener der innern eine entgegengesetzte Lage habe, so wie die Halbmesser ihrer Grundkreise.

VII. Zusatz: Eben so läßt sich die innere Epicycloide als eine äussere betrachten, deren Halbmesser der Basis negativ und der Winkel BAD erhaben ist, setzet man daher in die Gleichungen §. 361. den Halbmesser a negativ, und statt ψ den erhabenen Winkel ψ^{I}, so wird für die innere Epicycloide

$$x = -(a-b)\cos.\psi^{I} - b\cos.(\phi + \psi^{I})$$

$$y = -(a-b)\sin.\psi^{I} - b\sin.(\phi + \psi^{I})$$

$$z^2 = (-(a-b))^2 + b^2 + 2b(a-b)\cos.\phi$$

$$= (a-b)^2 + b^2 + 2b(a-b)\cos.\phi$$

VIII. Zusatz: Will man statt dem erhabenen Winkel ψ^{I} den hohlen ψ setzen, so ist:

$\psi^{I} = 360° - \psi$, also $\sin.\psi^{I} = -\sin.\psi$; $\cos.\psi^{I} = \cos.\psi$

$\phi + \psi^{I} = 360° + \phi - \psi$, $\sin.(\phi + \psi^{I}) = \sin.(\phi - \psi)$

$\cos.(\phi + \psi^{I}) = \cos.(\phi - \psi)$, Setzet man nun diese Werthe in die Gleichungen des VIIten Zusatzes, so ist

$$x = -(a-b)\cos.\psi - b\cos.(\phi - \psi), \text{ oder}$$

$$-x = (a-b)\cos.\psi + b\cos.(\phi - \psi)$$

$$y = (a-b)\sin.\psi - b\sin.(\phi - \psi), \text{ und}$$

$$z^2 = (a-b)^2 + b^2 + 2b(a-b)\cos.\phi$$

wie

wie Nr. 12 — 16; die Abscisse x ergiebt sich nothwendig, da sie wie der Halbmesser der Basis in Beziehung auf die äussere Epicycloide bey der innern eine entgegengesetzte Lage hat, negativ.

IX. Zusatz: Eben diese Werthe erhält man für die innere Epicycloide, wenn man in den Gleichungen §. 361. für die äussere Epicycloide die Größe b negativ, und statt der Summe $\phi + \psi$ die Differenz $\phi - \psi$ setzet, so daß also in der Folge alle aus den Gleichungen der äussern Epicycloide abgeleiteten Sätze für die innere gelten, so bald man diese Substitution vornimmt.

§. 363.

Lehrsatz: (Fig. 113.)

Behält man alle §. 361. angenommenen Bezeichnungen, und setzet bey der äussen Epicycloide den Bogen BM = s, ferner die Fläche, welche von den geraden Linien AB, AM, und dem Bogen BM, also von a, z und s begränzet wird, mithin ABMA = R, so ist:

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{2b\,(a + b)\,\sin.\tfrac{1}{2}\phi d\phi}{a}$$

$$dR = \tfrac{1}{2} z \sqrt{(ds^2 - dz^2)}$$

Be=

Beweis:

1. Auf dem Bogen BM der Epicycloide nehme man den Punct n unendlich nahe an M, so ist $Mn = ds$

2. Von n fälle man auf die Abscissenlinie AB den Perpendikel np, und von M auf letztern die senkrechte Mm, so ist: $Pp = Mm = dx$, und $mn = dy$, mithin

3. im rechtwinklichten unendlich kleinen Dreyecke Mmn ist: $Mn^2 = Mm^2 + mn^2$ (§. 233. VII. Zus.), also

4. $ds^2 = dx^2 + dy^2$, und

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{2b\,(a+b)}{a} \sin. \tfrac{1}{2}\,\phi d\phi$$

(§. 361. V. Zus.)

5. Zieht man ferner aus A mit $AM = z$ den Kreisbogen MN, und die gerade Linie An, welche diesen Bogen in o schneidet, so steht der Halbmesser Ao auf selben senkrecht, mithin ist $Mon = 90°$, und $on = dz$.

6. In dem rechtwinklichten unendlich kleinen Dreyecke Mon ist daher:

$Mo^2 = Mn^2 - on^2 = ds^2 - dz^2$ (Nr. 1. u. 5.); also

$Mo = \sqrt{(ds^2 - dz^2)}$

7. Fer-

7. Ferner ist das unendlich kleine Dreyeck AMnA $= dR$ das Flächenelement, und

8. $dR = \frac{1}{2}$ An . oM (§. 233. VIII. Zus.)
$= \frac{1}{2} (z + dz) \cdot \sqrt{(ds^2 - dz^2)}$
$= \frac{1}{2} z \sqrt{(ds^2 - dz^2)} + \frac{1}{2} dz \sqrt{(ds^2 - dz^2)}$

9. Nun ist aber das letzte Glied in Beziehung auf das vorhergehende unendlich klein (Arithm. §. 302. I. Zus.) folglich

10. $dR = \frac{1}{2} z \sqrt{(ds^2 - dz^2)}$ eine unvollständige Gleichung. (Arithmet. §. 299.)

Zusatz: Dieser Lehrsatz läßt sich auf ähnliche Art für die innere Epicycloide (Fig. 114.) erweisen.

§. 364.

Lehrsatz: (Fig. 113.)

Für den beliebigen Punct M der äussern Epicycloide, wenn man vom Puncte D, in welchem der Erzeugungskreis die Basis berührt, im erstern Kreise die Sehne DM zieht, so liegt sie in der Richtung der Normal dieser Epicycloide.

Beweis:

1. Man behalte so wohl die Construction, als die angegebenen Bezeichnungen §. 361. u. §. 363., so steht die Linie AM oder z auf den mit ihr aus A beschriebenen Kreisbogen MoN senkrecht, mithin

2. der Winkel $AMo = AMD + DMo = 90^\circ$

3. Im gleichschenklichten Dreyecke DCM ist
$2\,CDM = 180^\circ - DCM = 180^\circ - \phi$, also
$CDM = 90^\circ - \frac{1}{2}\phi$, mithin

4. $ADM = 180^\circ - CDM = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\phi)$
$= 90^\circ + \frac{1}{2}\phi$, folglich

5. $\sin.\, ADM = \cos.\, \frac{1}{2}\phi$.

6. Im Dreyecke ADM ist nun
$AM : AD = \sin.\, ADM : \sin.\, AMD$, das ist:
$z : a = \cos.\, \frac{1}{2}\phi : \sin.\, AMD$, mithin

7. $\sin.\, AMD = \frac{a \cos.\, \frac{1}{2}\phi}{z}$

8. In dem rechtwinklichten unendlich kleinen Dreyecke noM ist ferner:
$Mn : no = 1 : \sin.\, nMo$, oder
$ds : dz = 1 : \sin.\, nMo$, mithin

9. $\sin.\, nMo = \frac{dz}{ds}$

10. Nun ist aber $dz = \frac{2b\,(a+b) \sin.\, \frac{1}{2}\phi \cos.\, \frac{1}{2}\phi\, d\phi}{z}$
(§. 361. IV. Zus.) und

$ds = \frac{2b\,(a+b) \sin.\, \frac{1}{2}\phi\, d\phi}{a}$ (§. 363.)

11.

11. Setzet man diese beyden Werthe in die Gleichung Nr. 9., so wird

12. $\sin. nMo = \frac{a \cos. \frac{1}{2} \phi}{z}$, folglich

13. sin. nMo = sin. AMD (Nr. 7.), mithin AMD = nMo, und

14. AMD + DMo = nMo + DMo = DMn, also

15. DMn = 90° (Nr. 2.), das ist

16. die Sehne DM steht in M auf dem Elemente des Bogens, also auch der Tangente senkrecht, folglich fällt ihre Richtung mit jener der Normal zusammen.

I. Zusatz: Da sich die innere Epicycloide auf die äussere reduciren läßt (§. 362. VII. Zus.), so gilt der Lehrsatz auch für die innere Epicycloide, also allgemein für jede Epicycloide.

II. Zusatz: Zieht man im Erzeugungskreise durch den Berührungspunct D den Durchmesser DG, ferner die Sehne GM, so fällt letztere mit der Tangens MT in eine Linie, denn da der Winkel DMG = 90° (Geom. §. 72. III. Zus.) so steht GM durch M auf der Normal DM senkrecht, folglich fällt ihre Richtung mit jener der Tangens zusammen in eine Linie.

III. Zusatz: Für den Anfangspunct B fallen die beyden Puncte D und M mit B zusammen, mithin fällt die Tangens mit der geraden Linie PB zusammen, und hat also mit dem Halbmesser AB der Basis einerley Richtung.

IV. Zusatz: Gelangt der beschreibende Punct nach V, so fällt die Sehne DM mit dem Durchmesser EV zusammen, folglich steht in V, oder im Scheitel der Epicycloide, die Tangens auf der Richtung des Halbmessers AE vom Grundkreise senkrecht.

V. Zusatz: Berühren sich die Grundkreise einer äussern und innern Epicycloide BMI und B'MI' (Fig. 115.) in dem Puncte D, und gehört der Erzeugungskreis DMGD zu beyden gemeinschaftlich, so ist auch der Punct M, wenn die Bögen BD = B'D = MD, ein gemeinschaftlicher Punct beyder Epicycloiden (§. 358. III. Zus.), und die Sehne DM liegt in der Richtung ihrer Normal (Lehrs.), so wie die Sehne GM in der Richtung der Tangens (II. Zus.), folglich berühren sich die beyden Curven in M.

VI. Zusatz: Wälzet sich nun der eine Grundkreis auf dem andern fort, so bleiben beyde Epicycloiden stets mit einander in Berührung.

VII. Zusatz: Wenn noch der Halbmesser der Basis der innern Epicycloide doppelt so groß als jener des gemeinschaftlichen Erzeugungskreises ist, so wird die innere Epicycloide eine gerade Linie, welche durch den Anfangspunct B derselben und dem Mittelpunct A′ ihrer Basis geht (§. 362. II. Zus.), mithin ist eben diese gerade Linie, da sie immer mit der äussern Epicycloide in Berührung bleibt (VI. Zus.), wenn sich der eine Grundkreis über den andern fortwälzet, jedesmal die Richtung der Tangens der äussern Epicycloide.

§. 365.

Lehrsatz: (Fig. 116.)

Wenn für den beliebigen Bogen BM einer Curve BMI die gerade Linie AB solche in B berühret, mithin ganz ausserhalb an der erhabenen Seite der Curve liegt, ferner CM der Krümmungshalbmesser derselben in M ist, und man zieht aus M auf die Linie AB die senkrechte MP, so ist für AP = x, MP = y;

$$MC = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}$$

Beweis:

1. Da der Anfangspunct A der Abscisse AP nicht in B, sondern in der bestimmten Entfernung BA genommen wird, so besteht AP aus einer beständigen

digen

digen Größe AB = a, und einer veränderlichen BP = u, oder

2. $x = a + u$

3. Nun errichte man auf AP durch B die senkrechte BO, und fälle auf sie von M die senkrechte MQ, setze
BQ = v, und MQ = w, so ist

4. $u = w$, also
$x = a + u = a + w$
$dx = dw, \; d^2x = d^2w$

5. Eben so ist: $y = v$, mithin
$dy = dv$, und $d^2y = d^2v$

6. Für die rechtwinklichte Coordinaten v, und w ist aber

$$MC = -\frac{(dv^2 + dw^2)^{\frac{3}{2}}}{dv\, d^2w - dw\, d^2v} \quad (\S. 264.)$$

7. Setzet man in diese Gleichung aus Nr. 4. u. 5. die Werthe, so wird

$$8.\ MC = -\frac{(dy^2 + dx^2)^{\frac{3}{2}}}{dy\, d^2x - dx\, d^2y}$$

$$= \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}$$

§. 366.

§. 366.

Lehrsatz: (Fig. 113.)

Bey den bisher angenommenen Bestimmungen, wenn ϱ den Krümmungshalbmesser für die beliebige Stelle M der Epicycloide BMI bezeichnet, ist:

$$\varrho = \frac{4b\ (a+b)}{2b+a} \sin. \tfrac{1}{2}\, \phi$$

Beweis:

1. $\varrho = \dfrac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y - dy\, d^2x}$ (§. 365.)

2. $dx^2 + dy^2 = \dfrac{4b^2\ (a+b)^2}{a^2} \sin. \tfrac{1}{2}\, \phi^2\, d\phi^2$

(§. 361. V. Zus.), mithin

$$(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{8b^3\ (a+b)^3}{a^3} d\phi^3 \sin. \tfrac{1}{2}\, \phi^3$$

$$= \frac{4b^3 (a+b)^3}{a^3} d\phi^3 \sin. \tfrac{1}{2} \phi (1 - \cos. \phi)$$

(Trigon. §. 308. III. Zus.)

3. $dx = -\dfrac{b\ (a+b)}{a} d\phi\ [\sin. \psi - \sin. (\phi + \psi)\ ]$

$$dy = \frac{b\ (a+b)}{a} d\phi\ [\cos. \psi - \cos. (\phi + \psi)]$$

(§. 361. II. u. III. Zus.)

Diese beyden Werthe sind nun Functionen vom Winkel ϕ, indem $\psi = \dfrac{b}{a} \phi$ ist (§. 361. I. Zus.),

nimmt

nimmt man nun $d\phi$ als eine beständige Größe, so sind doch noch dx, dy veränderliche Größen.

4. Zur Abkürzung setze man:

$$\frac{b\,(a+b)}{a} = A$$

$$\sin.\,\psi - \sin.\,(\phi+\psi) = V$$

$\cos.\,\psi - \cos.\,(\phi+\psi) = W$, so wird

5. $(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}} = 4A^3\,d\phi^3 \sin.\,\tfrac{1}{2}\,\phi\,(1-\cos.\phi)$ (Nr. 2.)

6. $dx = -\,A\,d\phi\,.\,V$ (Nr. 3.), also
$d^2x = -\,Ad\phi dV$, und

7. $dy = Ad\phi\,.\,W$ (Nr. 3.), also
$d^2y = Ad\phi\,dW$, mithin

8. $dxd^2y = -\,A^2d\phi^2.\,VdW$
$dyd^2x = -\,A^2d\phi^2.\,WdV$, also

9. $dxd^2y - dyd^2x = A^2d\phi^2\,(WdV - VdW)$

10. Nun ist

$$dV = \cos.\psi d\psi - \cos.\,(\phi+\psi)\,(d\phi+d\psi) \text{ (Nr.4.)}$$

$$= \cos.\,\psi\frac{b}{a}d\phi - \cos.\,(\phi+\psi)\,(d\phi+\frac{b}{a}d\phi)$$

(§. 361. I. Zus.)

$= \frac{b}{a}d\phi.W - d\phi\,\cos.\,(\phi+\psi)$, und

11.

11. $WdV = \frac{b}{a} d\phi . W^2 - Wd\phi \cos.(\phi + \psi)$

12. $dW = -\sin.\psi d\psi + \sin.(\phi+\psi)(d\phi + d\psi)$

$= -\sin.\psi \frac{b}{a} d\phi + \sin.(\phi+\psi)(d\phi + \frac{b}{a} d\phi)$

$= -\frac{b}{a} d\phi . V + d\phi \sin.(\phi+\psi)$, und

13. $VdW = -\frac{b}{a} d\phi . V^2 + Vd\phi \sin.(\phi+\psi)$

folglich

14. $WdV - VdW = \frac{b}{a} d\phi (V^2 + W^2)$

$- Wd\phi \cos.(\phi+\psi) - Vd\phi \sin.(\phi+\psi)$

$= d\phi [\frac{b}{a}(V^2+W^2) - (V\sin.(\phi+\psi) + W\cos.(\phi+\psi)]$

15. Nun ist:

$V^2 = \sin.\psi^2 - 2\sin.\psi \sin.(\varphi+\psi) + \sin.(\varphi+\psi)^2$

$W^2 = \cos.\psi^2 - 2\cos.\psi \cos.(\varphi+\psi) + \cos.(\varphi+\psi)^2$

also

16. $V^2 + W^2 = 1 - 2\cos.\varphi + 1$ (Trigon. §.309. IV. Zus.)

$= 2(1 - \cos.\varphi)$

17. $V\sin.(\varphi+\psi) = \sin.\psi \sin.(\varphi+\psi) - \sin.(\varphi+\psi)^2$

$W\cos.(\varphi+\psi) = \cos.\psi \cos.(\varphi+\psi) - \cos.(\varphi+\psi)^2$

mithin

18. $V \sin.(\varphi+\psi) + W \cos.(\varphi+\psi) = \cos.\varphi - 1$, und

19. $-[V \sin.(\varphi+\psi) + W \cos.(\varphi+\psi)] = 1 - \cos.\varphi$

20. Setzet man endlich die Werthe aus Nr. 16. u. 19. in die Gleichung Nr. 14. so wird

21. $$WdV - VdW = d\varphi\,[\frac{b}{a} 2(1-\cos.\varphi) + (1-\cos.\varphi)]$$
$$= d\varphi\,((\frac{2b}{a} + 1)(1-\cos.\varphi))$$
$$= d\varphi\,[\frac{2b+a}{a}(1-\cos.\varphi)]$$

22. Substituirt man diesen Werth in die Gleichung Nr. 9., so wird

23. $$dxd^2y - dyd^2x = \frac{2b+a}{a} A^2 d\varphi^3 (1-\cos.\varphi)$$

24. Setzet man endlich die Werthe Nr. 5. u. 23. in die Gleichung Nr. 1., so wird:

25. $$\varrho = \frac{4A^3\,d\varphi^3 \sin.\frac{1}{2}\varphi\,(1-\cos.\varphi)}{\frac{2b+a}{a}\;A^2 d\varphi^3\,(1-\cos.\varphi)}$$
$$= \frac{4A \sin.\frac{1}{2}\varphi}{\frac{2b+a}{a}} = \frac{4aA \sin.\frac{1}{2}\varphi}{2b+a}$$

$$= \frac{4a \sin. \frac{1}{2} \varphi}{2b + a} \cdot \frac{b(a+b)}{a} \text{ (Nr. 4.)}$$

$$= \frac{4b(a+b) \sin. \frac{1}{2} \varphi}{2b + a}$$

I. Zusatz: Im rechtwinklichten Dreyecke DMG ist der Peripherie-Winkel DGM dem halben Centriwinkel DCM gleich, das ist:

$$DGM = \tfrac{1}{2} \phi$$

Ferner DG : DM = 1 : sin. DGM, oder

$$2b : DM = 1 : \sin. \tfrac{1}{2} \phi, \text{ also}$$

$$DM = 2b \sin. \tfrac{1}{2} \phi$$

Setzet man diesen Werth in die letzte Gleichung Nr. 25, so wird:

$$\varrho = \frac{2(a+b)}{2b+a} DM$$

II. Zusatz: $z^2 = (a+b)^2 + b^2 - 2b(a+b) \cos. \varphi$ (§. 361.), mithin

$$\cos. \varphi = \frac{(a+b)^2 + b^2 - z^2}{2b(a+b)}$$

Ferner $2 \sin. \frac{1}{2} \varphi^2 = 1 - \cos. \varphi$ (Trigon. §. 308. III. Zus.)

$$= 1 - \frac{(a+b)^2 + b^2 - z^2}{2b(a+b)}$$

$$= \frac{2ab + 2b^2 - a^2 - 2ab - 2b^2 + z^2}{2b(a+b)}$$

$$= \frac{z^2 - a^2}{2b(a+b)}, \text{ und daher}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}\varphi^2 = \frac{z^2 - a^2}{4b(a+b)}; \text{ also } \sin.\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\sqrt{(z^2 - a^2)}}{2\sqrt{(b(a+b))}}$$

Setzet man diesen Werth in die letzte Gleichung Nr. 25. so wird:

$$\varrho = \frac{4b(a+b)}{2b+a} \cdot \frac{\sqrt{(z^2-a^2)}}{2\sqrt{[b(a+b)]}}$$

$$= \frac{2\sqrt{[b(a+b)(z^2-a^2)]}}{2b+a}$$

III. Zusatz: Für die äussere Epicycloide, aus deren Construction (Fig. 113.) und Grundgleichungen (§. 361.) die voranstehenden Formeln abgeleitet sind, ist der Krümmungshalbmesser durch 3 verschiedene Gleichungen bestimmt, es ist nemlich:

$$\varrho = \frac{4b(a+b)}{2b+a} \sin.\tfrac{1}{2}\varphi \quad (\text{Nr. } 25.)$$

$$= \frac{2(a+b)}{2b+a} DM \quad (\text{I. Zus.})$$

$$= \frac{2\sqrt{[b(a+b)(z^2-a^2)]}}{2b+a} \quad (\text{II. Zus.})$$

IV. Zusatz: Bey der äussern Epicycloide ist daher

A) in Beziehung der verschiedenen Lagen des Punctes M

a) für

a) für den Anfangspunct B, wo also $\phi = 0$, mithin auch sin. $\frac{1}{2}\phi$, also auch $2b$ sin. $\frac{1}{2}\phi$ $= DM = 0$, und da $z = a$, also $z^2 - a^2 = 0$, wird

$\varrho = 0$ (§. 352. II. Zus.)

b) Im Scheittel V, wo nemlich $\phi = 180°$, ist sin. $\frac{1}{2}\phi = 1$, also $DM = 2b$, und $z = a + 2b$ mithin $z^2 - a^2 = a^2 + 4ab + 4b^2 - a^2 = 4b(a+b)$ also:

$$\varrho = \frac{4b\,(a+b)}{2b+a}$$

B) In Beziehung auf die verschiedene Größe der Halbmesser a, b der Basis und des Erzeugungskreises

a) Für $a = b$ wird

$\varrho = \frac{8}{3} b$ sin. $\frac{1}{2}\varphi = \frac{4}{3} DM = \frac{2}{3} \surd [2(z^2 - a^2)]$

b) für $a = \infty$, oder für die Cycloide:

$\varrho = 4b$ sin. $\frac{1}{2}\phi = 2\,DM$ (§. 352. III. Zus.)

V. Zusatz: Für die innere Epicycloide muß in den sämtlichen Gleichungen (III. Zus.) der Halbmesser b, mithin auch die Sehne $MD = 2b$ sin. $\frac{1}{2}\phi$ (I. Zus.), als eine negative Größe gesetzt werden (§. 362. IX. Zus.), mithin wird:

$$\varrho = -\frac{4b\,(a-b)}{a-2b}\,\sin.\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$= -\frac{2\,(a-b)}{a-2b}\,DM$$

VI. Zusatz: Bey der innern Epicycloide (Fig. 114.) ist daher

A) in Beziehung der verschiedenen Lagen des Punctes M,

a) im Anfange bey B

$\varrho = 0$

b) im Scheittel V:

$$\varrho = -\frac{4b\,(a-b)}{a-2b}$$

B) in Beziehung auf die verschiedene Größe der Halbmesser a und b

a) für $a = b$

$\varrho = 0$, das ist, die Hypocycloide schwindet in einen Punct zusammen (§. 362. III. Zus.)

b) für $a = 2b$

$\varrho = -\infty$, das ist, die Hypocycloide wird zur geraden Linie (§. 362. II. Zus.)

c) für $a = \infty$

$\varrho = -4b\,\sin.\tfrac{1}{2}\varphi = -2\,DM$ (IV. Zus. B. b.)

§. 367.

§. 367.

Lehrsatz: (Fig. 113.)

Wenn BM = s einen beliebigen Bogen der äussern Epicycloide bezeichnet, sonst aber alle bisher festgesetzte Bestimmungen beybehalten werden, so ist

$$s = \frac{4b\,(a+b)}{a}.(1-\cos.\tfrac{1}{2}\varphi)$$

Beweis:

1. $ds = \frac{2b\,(a+b)}{a}\,d\phi\,\sin.\tfrac{1}{2}\phi$ (§. 363.)

$$= \frac{4b\,(a+b)}{a}\,\tfrac{1}{2}\,d\phi\,\sin.\tfrac{1}{2}\phi,$$ mithin

2. $s = -\frac{4b\,(a+b)}{a}\cos.\tfrac{1}{2}\phi + \text{const.}$ (§. 236. III. Zus.)

3. Nun ist für $\phi = 0$, auch $s = 0$, und $\cos.\tfrac{1}{2}\phi = 1$, also

4. $0 = -\frac{4b\,(a+b)}{a} + \text{const.}$, oder

$$\text{const.} = \frac{4b\,(a+b)}{a},$$ folglich

5. $s = \frac{4b\,(a+b)}{a} - \frac{4b\,(a+b)}{a}\cos.\tfrac{1}{2}\phi$

$$= \frac{4b\,(a+b)}{a}\,(1-\cos.\tfrac{1}{2}\phi)$$

I. Zu-

I. Zusatz: Bey der äussern Epicycloide ist daher

A) in Beziehung auf den Winkel ϕ

a) für $\phi = 180°$, das ist, für eine halbe Umwälzung des Erzeugungskreises, wo $\cos. \frac{1}{2}\phi = 0$:

$$s = BV = \frac{4b\,(a+b)}{a}$$

b) für $\phi = 360°$, also für eine ganze Umwälzung des Erzeugungskreises, wo $\cos. \frac{1}{2}\phi = -1$: die ganze äussere Epicycloide, oder

$$s = BVI = \frac{4b\,(a+b)}{a}(1+1) = \frac{8b\,(a+b)}{a}$$

B) in Beziehung auf die Größe der beyden Halbmesser a, b der Basis und des Erzeugungskreises

a) für $a = b$:

α) $s = BM = 8b\,(1 - \cos. \frac{1}{2}\phi)$

β) die ganze Epicycloide, oder

$$s = BVI = 16\,b$$

b) für $a = \infty$, oder die Cycloide

α) $s = RM = 4b\,(1 - \cos. \frac{1}{2}\phi)$

β) die ganze Cycloide, oder

$s = BVI = 8\,b$ (§. 353. II. Zus.)

II. Zusatz: Für die innere Epicycloide, oder die Hypocycloide (Fig. 114.) muß nun b negativ gesetzt werden (§. 362. IX. Zus.) folglich wird:

$$s = -\frac{4b\,(a-b)}{a}(1-\cos. \tfrac{1}{2}\phi)$$

das

das ist, die innere Epicycloide hat mit der äussern eine entgegengesetzte Lage; sie ist nemlich nach jener Seite zu erhaben, nach welcher letztere hohl ist, wenn sie beyde eine und dieselbe Basis haben.

III. Zusatz: Ohne auf diese Entgegensetzung zu sehen, das ist, ausser dem Verhältnisse mit der äussern ist für die innere Epicycloide

$$s = \frac{4b\,(a-b)}{a}\,(1-\cos.\tfrac{1}{2}\phi),\ \text{mithin}$$

A) In Beziehung auf den Winkel ϕ

a) für $\phi = 180°$, oder eine halbe Umwälzung des Erzeugungskreises, wo also $\cos.\tfrac{1}{2}\phi = 0$,

$$s = BV = \frac{4b\,(a-b)}{a}$$

b) für $\phi = 360°$, oder eine ganze Umwälzung des Erzeugungskreises, wo also $\cos.\tfrac{1}{2}\phi = -1$ wird die ganze innere Epicycloide, oder:

$$s = BVI = \frac{8b\,(a-b)}{a}$$

B) In Beziehung der Größen der beyden Halbmesser a, b der Basis und des Erzeugungskreises, ist

a) für $a = b$ allemal

$s = 0$, das ist, die innere Epicycloide, schwindet

det in einen Punct zusammen (§. 362. III. Zus. u. §. 366. VI. Zus.)

b) für $a = 2b$, wird

α) jeder beliebige Theil oder

$$s = BM = 2b\,(1 - \cos.\tfrac{1}{2}\phi)$$

β) die ganze innere Epicycloide, oder

$$s = BVI = 4b = 2a$$ (§. 362. II. Zus.),

c) für $a = \infty$, oder die Cycloide ist wieder

α) der beliebige Bogen

$$s = BM = 4b\,(1 - \cos.\tfrac{1}{2}\phi)$$

β) die ganze Cycloide, oder

$$s = BVI = 8b$$ wie im I. Zus.

§. 368.

Lehrsatz: (Fig. 113.)

Bey der äussern Epicycloide, wenn R die Fläche bezeichnet, welche der Bogen BM, und die geraden Linien AB, AM begränzen, und alle übrigen bisherigen Bestimmungen unverändert bleiben, so ist:

$$R = \frac{b\,(a+b)\,(a+2b)}{2a}\,(\text{arc.}\,\phi - \sin.\,\phi)$$

Beweis:

1. $dR = \frac{1}{2} z \sqrt{(ds^2 - dz^2)}$ (§. 363.), oder

2. $dR = \frac{1}{2} ds \sqrt{(z^2 - \frac{z^2 dz^2}{ds^2})}$

3. Nun ist: $\frac{1}{2} ds = \frac{b(a+b)}{a} d\phi \sin.\frac{1}{2}\phi$ (§.363.), also

4. $ds^2 = \frac{4b^2(a+b)^2}{a^2} d\phi^2 \sin.\frac{1}{2}\phi^2$

5. $dz^2 = \frac{4b^2(a+b)^2}{z^2} d\phi^2 \sin.\frac{1}{2}\phi^2 \cos.\frac{1}{2}\phi^2$ (§. 361. IV. Zus.), also

6. $z^2 dz^2 = 4b^2(a+b)^2 d\phi^2 \sin.\frac{1}{2}\phi^2 \cos.\frac{1}{2}\phi^2$, mithin nach Nr. 4. wird

7. $\frac{z^2dz^2}{ds^2} = a^2 \cos.\frac{1}{2}\phi^2 = a^2(1 - \sin.\frac{1}{2}\phi^2)$

$= a^2 - a^2 \sin.\frac{1}{2}\phi^2.$

8. $z^2 = (a+b)^2 + b^2 - 2b(a+b)\cos.\phi$ (§. 361.)

$= (a+b)^2 + b^2 - 2b(a+b)(1 - 2\sin.\frac{1}{2}\phi^2)$

(Trig. §. 308. III. Zus.)

$= a^2 + 2ab + 2b^2 - 2ab - 2b^2$

$+ 4b(a+b)\sin.\frac{1}{2}\phi^2$

$= a^2 + 4b(a+b)\sin.\frac{1}{2}\phi^2$, mithin

9. $z^2 - \frac{z^2dz^2}{ds^2} = a^2\sin.\frac{1}{2}\phi^2 + 4b(a+b)\sin.\frac{1}{2}\phi^2$

$= (a^2 + 4ab + 4b^2)\sin.\frac{1}{2}\phi^2$, und

10. $\sqrt{\left(z^2 - \frac{z^2dz^2}{ds^2}\right)} = (a+2b)\sin.\frac{1}{2}\phi$

11. Setzet man nun die Werthe Nr. 3. und 10. in die Gleichung Nr. 2., so wird:

$$12.\ dR = \frac{b\,(a+b)\,(a+2b)}{a}\, d\phi\ \sin.\tfrac{1}{2}\phi^2$$

$$= \frac{b\,(a+b)\,(a+2b)}{2a}\, d\phi\ (1 - \cos.\ \phi)$$

(Trigon. §. 308. IV. Zus.), folglich

$$13.\ R = \frac{b\,(a+b)\,(a+2b)}{2a}\,(\text{arc.}\ \phi - \sin.\ \phi)$$

(§. 236. III. Zus. und Arithm. §. 326.), wo keine const. addirt werden darf, weil für $\phi = o$, auch arc. $\phi = o$, sin. $\phi = o$ und $R = o$ ist.

I. Zusatz: Bey der äussern Epicycloide ist also

A) in Beziehung auf den Winkel ϕ

a) für $\phi = 180°$, also für eine halbe Umwälzung des Erzeugungskreises, wo arc. $\phi = \pi$, (§.301. I. Zus.) sin. $\phi = o$ ist

$$R = BAVMB = \frac{b\,(a+b)\,(a+2b)}{2a}\,\pi$$

b) für $\phi = 360°$ oder eine ganze Umwälzung ist arc. $\phi = 2\pi$, sin. $\phi = -o$, mithin

$$R = BAIVMB = \frac{b\,(a+b)\,(a+2b)}{a}\,\pi$$

B) in Beziehung auf die Größe der beyden Halb-

messer

messer a, b der Basis und des Erzeugungskreises ist

a) für $a = b$

α) überhaupt $R = BAMB = 3b^2 (arc.\phi - sin.\phi)$

β) für eine halbe Umwälzung: oder

$R = BAVMB = 3b^2 \pi$

γ) für eine ganze Umwälzung

$R = BAIVMB = 6b^2 \pi$

b) für $a = 2b$ wird ebenfalls

$R = 3b^2 (arc.\ \phi - sin.\ \phi)$

c) für $a = \infty$, oder für die Cycloide ist

$R = \infty$

II. Zusatz: Die Fläche BMS, welche durch die beyden Curven BM und BS, und die gerade Linie MS begränzt ist, läßt sich ebenfalls für jeden Winkel ϕ bestimmen. Denn area BMS = areae BMA — Sector BAS.

Nun ist durch den Lehrsatz area BMA bestimmt. Ferner ist durch den Halbmessrr $AB = a$, und dem eingeschlossenen Winkel $BAS = BAD - DAS = \psi - DAS = \frac{b}{a}\phi - DAS$ auch der Sector bestimmt, wo also alles bis auf den Centriwinkel DAS bekannt ist.

Es ist aber im geradlinigten Dreyecke DAM, die Seite $AD = a$, $AM = z = \surd\ [(a+b)^2$

+

$+ b^2 - 2b(a+b) \cos. \phi$] (§. 361.) ferner die Seite DM $= 2b \sin. \frac{1}{2}\phi$ (§. 366. I. Zus.) bekannt, aus diesen 3 Seiten läßt sich nun der Winkel DAM = DAS jedesmal berechnen (Trigonom. §. 341.)

III. Zusatz: Für die innere Epicycloide (Fig. 114.) muß wieder b negativ gesetzt werden (§. 362. IX. Zus.), dadurch wird nun:

$$R = -\frac{b(a-b)(a-2b)}{2a}(\text{arc.}\,\phi - \sin.\,\phi)$$

Die Fläche hat nemlich eine der äussern Epicycloide entgegengesetzte Lage, ohne auf diesen Gegensatz Rücksicht zu nehmen ist also für die innere Epicycloide

$$R = \frac{b(a-b)(a-2b)}{2a}(\text{arc.}\,\phi - \sin.\,\phi)$$

IV. Zusatz: Bey der innern Epicycloide wird also

A) in Beziehung auf den Winkel ϕ

a) für $\phi = 180°$, wo der Erzeugungskreis eine halbe Umwälzung vollendet hat, und arc. $\phi = \pi$ sin. $\phi = 0$, ist

$$R = ABMVA = \frac{b(a-b)(a-2b)}{2a}\pi$$

b) für $\phi = 360°$, also arc. $\phi = 2\pi$, und

sin.

sin. $\phi = - 0$, wo eine ganze Umwälzung vollendet ist, wird

$$R = ABMVIA = \frac{b\,(a-b)\,(a-2b)}{a}\,\pi$$

B) in Beziehung auf die Größe der beyden Halbmesser a, b

a) für $a = b$ ist allemal

$R = 0$, weil die ganze innere Epicycloide in einem Punct zusammen schwindet (§. 362. III. Zus.)

b) für $a = 2b$ ist ebenfalls

$R = 0$, denn die gerade Linie AM fällt immer mit AB zusammen (§. 362. II. Zus.)

c) für $a = \infty$ ist auch wie bey der äussern

$R = \infty$

§. 369.

Erklärungen: (Fig. 117.)

Wenn sich der Erzeugungskreis bthb am äussern Umfange der Basis fortwälzet, hingegen der beschreibende Punct B zwar in der Ebene dieser beyden Kreise, aber nicht im Umfange des Erzeugungkreises, sondern in einer gegebenen Entfernung CB liegt, so heißt

a) die von B während einer ganzen Umwälzung des Erzeugungskreises beschriebene Curve BFI eine verkürzte Epicycloide, und

b)

b) der aus C mit CB verzeichnete Kreis BTHB der beschreibende Kreis.

I. Zusatz: Der erzeugende, und der beschreibende sind also concentrische Kreise, und gleichen Centriwinkeln, entsprechen daher ähnliche Bögen.

II. Zusatz: Wenn sich der erzeugende Kreis von b bis d fortwälzt, so kömmt dadurch der Berührungspunct b in die Lage f, so daß jedesmal der Kreisbogen bd der Basis, dem Kreisbogen df des Erzeugungskreises gleich ist (§.358. II.Zus.)

III. Zusatz: Wenn nun der Punct b in die Lage f kömmt, so kömmt der beschreibende Punct B in die Lage F, rückt also der Erzeugungskreis, welcher anfänglich die Basis in b berührt bis d fort, und man nimmt den Bogen df = db, zieht durch f den Halbmesser Ef bis an die Peripherie des beschreibenden Kreises, so das sie in F zusammen treffen, so ist F die Lage des beschreibenden Punctes, mithin ein Punct der verkürzten Epicycloide.

IV. Zusatz: Wenn der Erzeugungskreis von b bis d sich fortgewälzet hat, und zieht man die Halbmesser desselben Ed, Ef, und die Halbmesser Ab, Ad der Basis, so ist für die gleichen Bögen bd = bf

bAd:

$$bAd : dEf = Ed : Ad, \text{ mithin } bAd = \frac{Ed}{Ad} dEf$$

(§. 358. V. Zus.), und umgekehrt wo dieses Verhältniß der beyden Centriwinkel Statt hat, da sind die Bögen gleich.

§. 370.

Aufgabe: (Fig. 117.)

Der erzeugende Kreis berührt anfänglich die Basis in b, so daß anfänglich der beschreibende Punct B in den durch b gezogenen Diameter BT des beschreibenden Kreises fällt, im letztern Durchmesser ist nun ein Punct M, das ist, dessen Entfernung AM vom Mittelpuncte A der Basis gegeben, man sucht einen Punct, welcher in der verkürzten Epicycloide liegt, und eben dieselbe Entfernung hat.

Auflösung:

1. Man ziehe den Halbmesser Ab der Basis, so fällt solcher mit dem Durchmesser bt des erzeugenden (Geometr. §. 111. I. Zus.), also auch mit dem Durchmesser BT des concentrischen beschreibenden Kreises in eine gerade Linie, in welcher also der gegebene Punct M liegt.

2. Aus A beschreibe man mit AM den Kreisbogen $M\mu$, welcher die Peripherie des beschreibenden Kreises in einem Puncte H schneiden wird.

3. zieht man also den Halbmesser CH, so ist dadurch der Centriwinkel BCH = bCh bestimmt.

4. An dem Halbmesser Ab verzeichne man den Centriwinkel bAd = $\frac{Cb}{Ab}$ bCh, so ist der Bogen bh des erzeugenden Kreises dem Bogen bd der Basis gleich (§. 369. IV. Zus.)

5. Nun verlängere man den Halbmesser Ad, bis er den Bogen Mμ in einem Puncte N schneidet.

6. Nimmt man endlich auf diesem Bogen NF=MH, so ist F der gesuchte Punct der verkürzten Epicycloide.

Beweis:

7. Man verzeichne den Erzeugungskreis, welcher den Grundkreis in d berühret (Geometr. §. 112.), und mit ED = CB den beschreibenden Kreis, ziehe durch d des letztern Durchmesser DG, so fällt solcher mit Ad in eine gerade Linie (Geom. §. 111. I. Zus.)

8. Vom Mittelpuncte E ziehe man die gerade Linie EF, und

9. eben so vom Mittelpunct A der Basis die geraden AF, AH, so ist

10. AF = AH = AM (Nr. 2.)

11. Ferner $AC = Ab + bC = Ad + dE = AE$, und

12. die Winkel $CAH = EAF$, weil arc. $MH =$ arc. NF (Nr. 6.), mithin

13. $\triangle CAH \cong \triangle EAF$, folglich

14. $EF = CH$, das ist: der Punct F ist vom Mittelpuncte E um den Radius CH des beschreibenden Kreises entfernt, folglich liegt er im Umfange dieses Kreises.

15. Ferner ist nach Nr. 13. der Winkel $AEF = ACH$, also auch $dEf = bCh$, mithin

16. arc. $df =$ arc. bh (Geom. §. 64.) $=$ arc. bd (Nr. 4.)

17. Folglich fällt F in die abgekürzte Epicycloide (§. 369. III. Zus.), und hat die verlangte Entfernung (Nr. 10), ist also der gesuchte Punct.

I. Zusatz: Berühret der Erzeugungskreis anfänglich die Basis in b, so daß B der Anfangspunct der verkürzten Epicycloide ist, und man nimmt auf dem Erzeugungskreise und der Basis, die beliebigen einander gleichen Bögen, also $bh = bd$, zieht den Halbmesser Ch bis an die Peripherie des beschreibenden Kreises, oder bis H, verzeichnet aus A mit dem Halbmesser AH den Kreisbogen $MH\mu$, ziehet ferner aus A die geraden

Linien Ab, Ad, bis solche diesen Kreisbogen in M und N schneiden, und nimmt endlich auf eben diesem Bogen NF = MH, so ist F ein Punct der verkürzten Epicycloide, welche der Punct B beschreibt, während sich der erzeugende Kreis von b bis d wälzet.

II. Zusatz: Da arc. bh: arc. bht = arc. BH: arc. BHT (§. 369. I. Zus.), so findet man den Punct H, in welchen der Halbmesser bh verlängert, die Peripherie des beschreibenden Kreises schneidet, wenn man den Bogen BH von solch einer Länge nimmt, daß er sich zum Halbkreise BHT eben so wie der Bogen bh des erzeugenden Kreises zur halben Peripherie bht verhält.

III. Zusatz: Theilet man daher die halbe Peripherie des Erzeugungskreises, welcher die Basis in i berührt in eine beliebige Anzahl z. B. in 5 gleiche Theile ie, ef, fg, gh, hk, und in eben so viele gleiche Theile Iα, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, δK, die halbe Peripherie des beschreibenden Kreises, so sind α, β, γ, δ, K die Puncte, in welchen die durch e, f, g, h, k, gezogenen Radien dessen Peripherie schneiden.

IV. Zusatz: Nimmt man also auf der Basis den Bogen iL = ie des Erzeugungskreises, und beschreibt

schreibt aus A mit Aα einen Kreisbogen αs, welcher den Durchmesser IK in a schneidet, zieht ferner die gerade Linie AL, bis solche den Bogen αs in l schneidet, und nimmt endlich auf eben diesem Bogen ls = aα, so ist s ein Punct der verkürzten Epicycloide, welche der beschreibende Punct I verzeichnet, wenn sich der erzeugende Kreis, von b gegen LOP zu, auf der Basis fortwälzet.

V. Zusatz: Auf ähnliche Art wie §. 360. läßt sich daher aus den gegebnen Halbmessern Ai, Ci und CI die verkürzte Epicycloide I s t u w r verzeichnen.

§. 371.

Lehrsatz: (Fig. 118.)

Wenn für den beliebigen Punct M der verkürzten Epicycloide, welche in B ihren Anfangspunct hat, der erzeugende Kreis die Basis in d berühret, und man zieht vom Mittelpuncte A der letztern die geraden Linien AB, AM, Ad, nimmt erstere zur Abscissenlinie, fällt von M auf ihre Verlängerung die rechtwinklichte Ordinate MP, zieht im beschreibenden Kreise durch d den Diameter GD, ferner den Halbmesser CM, setzet den Halbmesser der Basis Ab = a, den Halbmesser des erzeugenden Kreises Cd = b,

den Radius des beschreibenden Kreises CD = c, ferner die Centriwinkel MCD = mCd = ϕ, bAd = ψ, die Abscisse AP = x, die Ordinate MP = y, die Entfernung des Punctes M vom Mittelpuncte A der Basis, oder AM = z, so ist

$$x = (a+b)\cos.\psi - c\cos.(\phi+\psi)$$
$$y = (a+b)\sin.\psi - c\sin.(\phi+\psi)$$
$$z^2 = (a+b)^2 + c^2 - 2c(a+b)\cos.\phi$$

Beweis:

1. Der durch d gezogene Diameter GD fällt mit gd, also auch mit Ad in eben dieselbe gerade Linie (Geom. §. 111. I. Zus.)

2. Man fälle aus C auf AP die senkrechte CO, und auf letztere von M den Perpendikel MQ, so ist CO ‡ MP, und MQ ‡ PO, mithin

3. MP = QO, und MQ = PO;

4. Im rechtwinklichten Dreyecke AOC ist der Winkel ACO = 90° — OAC = 90° — bAd = 90° — ψ

5. Im Dreyecke MCQ ist der Winkel MCQ = MCD — QCD = mCd — ACO = ϕ — (90° — ψ) (Nr. 4.) = $\phi + \psi$ — 90°, also

6. sin.

6. $\sin. MCQ = - \cos. (\phi + \psi)$, und
$\cos. MCQ = \sin. (\phi + \psi)$

7. Ferner ist im rechtwinklichten Dreyecke CQM
$MC : MQ = 1 : \sin. MCQ$, oder
$c : MQ = 1 : - \cos. (\phi + \psi)$; und
$MC : CQ = 1 : \cos. MCQ$, oder
$c : CQ = 1 : \sin. (\phi + \psi)$, also

8. $MQ = - c . \cos. (\phi + \psi)$
$CQ = c . \sin. (\phi + \psi)$

9. Im rechtwinklichten Dreyecke AOC ist ebenfalls
$AC : CO = 1 : \sin. CAO$, oder
$(a+b) : CO = 1 : \sin. \psi$; und
$AC : AO = 1 : \cos. CAO$, oder
$(a+b) : AO = 1 : \cos. \psi$, mithin

10. $CO = (a+b) \sin. \psi$
$AO = (a+b) \cos. \psi$

11. Nun ist $AP = AO + OP = AO + MQ$ (Nr. 3.) also

12. $x = (a+b) \cos. \psi - c \cos. (\phi + \psi)$ (Nr. 8. u. 10.)

13. Ferner $MP = OQ$ (Nr. 3.) $= CO - CQ$, folglich

14. $y = (a+b) \sin. \psi - c \sin. (\phi + \psi)$ (Nr. 8. u. 10.)

15. $x^2 = (a+b)^2 \cos.\psi^2 - 2c(a+b)\cos.\psi \cos.(\varphi+\psi) + c^2 \cos.(\phi+\psi)^2$

$y^2 = (a+b)^2 \sin.\psi^2 - 2c(a+b)\sin.\psi \sin.(\phi+\psi) + c^2 \sin.(\phi+\psi)^2$, also

16. $z^2 = AM^2 = AP^2 + MP^2 = x^2 + y^2$
$= (a+b)^2 + c^2 - 2c(a+b)\cos.\phi$ (§. 361. Nr. 16. u. Trigon. §. 309. IV. Zus.)

I. Zusatz: Da wieder arc. bd = arc. dm, mithin $\psi : \phi = b : a$ (§.369. IV. Zus.), so ist $\psi = \frac{b}{a}\phi$, und

$d\psi = \frac{b}{a} d\phi$, folglich

II. Zusatz:

$$dx = -\frac{a+b}{a} d\phi \,[b \sin.\psi - c \sin.(\phi+\psi)]$$

$$dy = \frac{a+b}{a} d\phi \,[b \cos.\psi - c \cos.(\phi+\psi)]$$

$$dz = \frac{c(a+b)\sin.\phi d\phi}{z}$$

III. Zusatz: Auf ähnliche Art wie bey der gemeinen Epicycloide kann man also für einen gegebenen Bogen der verkürzten Epicycloide ihren Krümmungshalbmesser, die Retification, oder Quadratur bestimmen.

IV. Zu=

IV. Zusatz: Durch ein ganz ähnliches Verfahren wie §. 364. ergiebt sich aber, daß die Sehne DM nicht in der Richtung der Normal liege, folglich auch, die durch G gezogene Sehne GM nicht einerley Lage mit der Tangens habe.

§. 372.

Erklärungen: (Fig. 119.)

Wälzet sich der erzeugende Kreis BTHB auf der äussern, also auf der erhabeuen Seite des Grundkreises BDRQ u. s. w. mit welchem er in einerlei Ebene liegt, fällt aber der beschreibende Punct b nicht in den Umfang, sondern innerhalb desselben in die Entfernung Cb so heißt

a) die vom Puncte b beschriebene Curve b f r i eine gestreckte Epicycloide, und

b) der aus C mit Cb beschriebene Kreis b t h b der beschreibende Kreis.

Zusatz: Man sieht aus den bisher vorgetragenen Lehren die Art des Verfahrens ein, wenn man die Eigenschaften dieser Linie genau entwickeln will.

§. 373.

Erklärung: (Fig. 120. u. 121.)

Wenn der beschreibende Kreis BHT mit dem unbeweglichen Grundkreis BDI (um die Verwirrung

zu

zu vermeiden, sind von beyden Kreisen nur ihre Hälften gezeichnet) nicht in einerley Ebene fällt, sondern gegen denselben unter einem beliebigen Winkel geneigt ist, so heißt die vom Puncte B bey dem Fortwälzen erzeugte Linie eine sphärische Epicycloide.

I. Zusatz: Der Neigungswinkel der beyden Kreisebenen BHT und BDI ist dem Winkel TBI der beyden Diameter am Berührungspuncte B gleich, denn offenbar schneiden die beyden Ebenen einander in einer geraden Linie durch B (Geometr. §. 161. II. Zus.), welche mit der Peripherie eines jeden Kreises nur den Punct B gemein hat, mithin die gemeinschaftliche Tangens ist, auf dieser Tangens stehen nun die beyden Durchmesser BT, BI senkrecht (Geom. §. 76. I. Zus.), folglich ist der Winkel TBI der Neigungswinkel beyder Kreisebenen (Geom. §. 169. III. Zus.)

II. Zusatz: Die Neugungsebene TBI steht auf beyden Kreisebenen senkrecht (Geom. §.170. VII. Zus.) errichtet man also durch die Mittelpuncte C, A auf die Ebenen dieser Kreise die Perpendikel CK, AK, so fallen sie ganz in die Ebene TBI, und der Winkel BCK = BAK = 90° (Geom. §. 170. IV. Zus.), folglich stossen diese auf die Schenkeln des hohlen Winkel TBI errichteten Perpendikel

dikel

dikel in einem Puncte K zusammen. (Geom. §. 46.)

III. Zusatz: Der Punct K ist von allen Puncten der Peripherie des Erzeugungskreises gleich weit entfernt, denn man ziehe von K nach 2 beliebigen Puncten B, T der Peripherie die geraden Linien KB, KT, und im Erzeugungskreise die Halbmesser CB, CT, so ist $\triangle KCB \cong \triangle KCT$, folglich KB = KT, eben so folgt, daß BK = KI, mithin daß alle Puncte der Peripherie des Grundkreises gleich weit von K abstehen.

IV. Zusatz: Wälzet sich nun der Erzeugungskreis auf der Peripherie des Grundkreises BDI, und bleibt dabey der anfängliche Neugungswinkel TBI (I. Zus.) unverändert, so bleiben auch alle Puncte der Peripherie des Erzeugungskreises stäts in der gleichen Entfernung KB vom Puncte K, folglich auch der beschreibende Punct B, mithin fällt die ganze Epicycloide BMI in die Oberfläche einer Kugel, von welcher KB der Radius ist, und heißt daher eine sphärische Epicycloide.

V. Zusatz: Zieht man von T auf die Ebene des Grundkreises die senkrechte Linie TE, so ist: TB : TE = 1 : sin. TBE = 1 : sin. TBI, mithin

TE

TE = TB sin. TBI, das ist, der Erzeugungskreis, während er sich auf der Peripherie des Grundkreises mit unveränderter Neigung TBI fortwälzet, bleibt immer zwischen der Peripherie des Grundkreises, und eines Parallelkreises, welcher von der Basis um TE entfernt ist, folglich liegt die sphärische Epicycloide in dem sphärischen Gürtel TBIS zwischen zweyen Parallelkreisen BDI u. TGS.

VI. Zusatz: Die Linie AK, wenn man sie beyderseits bis an die Oberfläche der Kugel verlängert, ist die gemeinschaftliche Axe, so wie P, Q die Pole der beyden Parallelkreise BDI und TGS; Ebenso

VII. Zusatz: Verlängert man KC beyderseits bis an die Oberfläche der Kugel, so sind c, γ die Pole des Erzeugungskreises (Geom. §. 253. IV. Zus.)

VIII. Zusatz: Ein Kreis, welcher sowohl durch die Pole P, Q des Grundkreises, als durch die Pole c, γ des Erzeugungskreises geht, ist ein größter Kreis, steht auf beyden senkrecht (Sphär. Trigon. §. 379.), und geht allemal durch die Berührungspuncte B, T des Erzeugungskreises mit dem Grund- und dem andern Parallelkreise, und umgekehrt: geht ein Kreis durch die Berührungs-

puncte

puncte B, T und die Pole P, Q des Grundkreises, so geht er auch durch die Pole c, γ des Erzeugungskreises, ist ein größter Kreis, uud steht auf beyden Kreisen senkrecht.

IX. Zusatz: Wenn zwey größte Kreise PIQ, PRQ durch die Pole P, Q der beyden Parallelkreise TGS, BDI gehen, so sind die zwischen den größten Kreisen enthaltenen Bögen LS, OI dieser Parallelkreise einander ähnlich, und jeder hält so viele Grade als die sphärischen Winkel OQI = OPI; denn die beyden größten Kreise PIQ, PRQ stehen auf den Parallelkreisen senkrecht, mithin bilden ihre Durchschnittslinien den Neigungswinkel dieser Kreise gegeneinander (Geom. §. 171. II. Zus.), folglich ist der Winkel LFS = OAI = OQI = OPI (Sphär. Trigon. §. 381. II. Zus.), folglich haben auch die Bögen LS, OI dieser Centriwinkel gleich viele Grade.

X. Zusatz: Wenn ein größter Kreis PBQIP durch die Pole eines Kreises BDI, TGS oder BHT geht, also letztere halbirt, mithin die Durchschnittslinien BI, TS, BT Diameter dieser Kreise sind (Sphär. Trig. §. 379.), so sind die Halbmesser AB, FT, CB die Sinus der zwischen ihnen und dem Pole enthaltenen Bögen, das ist:

der

der Halbmesser AB = sin. arc. BQ, und eben so FT = sin. arc. QT, BC = sin. arc. Bc,

XI. Zusatz: Der Erzeugungskreis kann nie ein größter Kugelkreis seyn, mithin sind allemal die Bögen cB, cT eines durch dessen Pole gelegten größten Kreises spitzig, so wie auf der andern Seite γPB, γQT stumpf.

§. 374.

Aufgabe: (Fig. 120. und 121.)

Aus den gegebenen Halbmessern AB=a, BC=b, und dem Neigungswinkel TBI = B des Grund- und Erzeugungskreises die beyden Perpendikel CK = c, AK = k, nebst den von ihnen eingeschlossenen Winkel AKC = K zubestimmen.

Auflösung:

1. ABCKA bildet eine gebrochene in sich selbst zurückkehrende Linie.

2. Man bezeichne die Winkel mit den an ihren Scheittel gesetzten größern Buchstaben A, B, C, K, und mit den kleinern Buchstaben a, b, c, k die anliegenden Seiten AB, BC, CK, KA.

3. Von diesen Stücken sind nun nebst den beyden Linien a, b und dem eingeschlossenen Winkel B,

die

die beyden Winkel $A = C = 90°$ (§. 373. II. Zus.) gegeben.

4. Nimmt man die Seite AK zur Abscissenlinie, und A für ihren Anfangspunct, so ist für die Ecke K die rechtwinklichte Ordinate = o, mithin

5. $o = a \sin. A - b \sin. (A + B) + c \sin. (A + B + C)$ (§. 5.)

6. Ferner ist $a \sin. A = a$ (Nr. 3.);
$- b \sin. (A + B) = - b \sin. (90° + B) = - b \cos. B$;
$+ c \sin. (A + B + C) = + c \sin. (180° + B) = - c \sin. B$
(Trig. §. 296. IV. Zus. und §. 306.)

7. Setzet man nun diese Werthe in die Gleichung Nr. 5., so ist

8. $o = a - b \cos. B - c \sin. B$, also
$c \sin. B = a - b \cos. B$, und

9. $c = \frac{a - b \cos. B}{\sin. B} = a . \text{cosec.} B - b \cot. B$

10. Nimmt man nun AB zur Abscissenlinie, und B für ihren Anfangspunct, so ist für eben die Ecke K die rechtwinklichte Ordinate = AK = k, mithin

11. $k = b \sin. B - c \sin. (B + C)$
$= b \sin. B - c \sin. (B + 90°)$
$= b \sin. B - c \cos. B$
$= b \sin. B - \frac{(a - b \cos. B) \cos. B}{\sin. B}$ (Nr. 9.)

=

$$= \frac{b \sin. B^2 - a \cos. B + b \cos. B^2}{\sin. B},$$

folglich

12. $k = \frac{b - a \cos. B}{\sin. B} = b \operatorname{cosec}. B - a \cot. B$

13. Nimmt man endlich wieder AK zur Abscissenlinie, und A für ihren Anfangspunct, so ist für die Ecke K

$$\operatorname{tang}. K = \frac{a \sin. A - b \sin. (A+B)}{k - a \cos. A + b \cos. (A+B)} \text{ (§. 6.)}$$

14. Nun ist $a \sin. A = a$;

$-b \sin.(A+B) = -b \sin.(90^\circ + B) = -b \cos. B$, also

15. $a \sin. A - b \sin. (A+B) = a - b \cos. B$

16. $- a \cos. A = o$;

$+ b \cos.(A+B) = + b \cos.(90^\circ + B) = - b \sin. B$ (Trigon. §. 308.), mithin

17. $k - a \cos. A + b \cos. (A+b)$

$$= \frac{b - a \cos. B}{\sin. B} - b \sin. B \text{ (Nr. 12.)}$$

$$= \frac{b - a \cos. B - b \sin. B^2}{\sin. B}$$

$$= \frac{b \cos. B^2 - a \cos. B}{\sin. B}$$

$$= - \frac{(a - b \cos. B) \cos. B}{\sin. B}$$

=

$$= -\frac{a - b\cos. B}{\text{tang}. B}$$

18. Setzet man für Zähler und Nenner die Werthe Nr. 15. u. 17. in die Gleichung Nr. 13., so wird

$$19.\ \text{tang}. K = (a - b\cos. B) \times -\frac{\text{tang}. B}{a - b\cos. B}$$

$$= -\text{tang}. B$$

wodurch nebst Nr. 9. und 12. die Aufgabe aufgelöset ist.

I. Zusatz: Für $B = 90°$, ist $\text{cosec}. B = 1$; $\cot. B = 0$, und $\text{tang}. B = \infty$, mithin
$c = a$ (Nr. 9.), das ist: $CK = AB$;
$k = b$ (Nr. 12.), oder $AK = BC$;
$\text{tang}. K = -\infty$, also K der Ergänzungswinkel von B zu 180°, mithin $K = 90°$.

II. Zusatz: Für $B > 90°$ (Fig. 120.) ist sowohl die Tangens als die Cotangens negativ, hingegen die Cosecans bleibt positiv, mithin
$c = a\ \text{cosec}. B + b\cot. B$ (Nr. 9.)
$k = b\ \text{cosec}. B + a\cot. B$ (Nr. 12.)
$\text{tang}. K = \text{tang}. B$, das ist, K ergänzt B zu 180°, und ist also spitzig.
Für $B = 180°$, ist $\text{cosec}. B$, $\cot. B$ unendlich, mithin $c = k = \infty$; $\text{tang}. K = 0$, das ist die beyden Kreisebenen fallen in eine Ebene, und

die

die sphärische verwandelt sich in die gemeine äussere Epicycloide.

III. Zusatz: Für $B < 90°$ (Fig. 121.) sind alle Trigonometrischen Linien dieses Winkels positiv, mithin

$c = a \text{ cosec. } B - b \text{ cot. } B$

$k = b \text{ cosec. } B - a \text{ cot. } B$

$\text{tang. } K = - \text{tang. } B$

folglich ist B der Ergänzungswinkel von K.

So lange $a \text{ cot. } B < b \text{ cosec. } B$, also

$$\frac{a \cos. B}{\sin. B} < \frac{b}{\sin. B}, \text{ mithin, so lange}$$

$\cos B < \frac{b}{a}$, so lange bleibt k positiv, und behält also eine Fig. 120. ähnliche Lage, und der Winkel K ist stumpf $= 180° - B$.

Für $\cos. B = \frac{b}{a}$ wird $k = 0$, folglich fällt der Mittelpunct der Kugel K mit dem Mittelpunct A der Basis zusammen.

Wenn endlich $\cos. B > \frac{b}{a}$, so wird k negativ, das ist, AK bekömmt eine entgegengesetzte Lage, wie Fig. 121, und der Winkel K wird erhaben, mithin $K = 360° - B$, also auf der hohlen Seite $= B$.

IV. Zu-

IV. Zusatz:

Für $B=0$, ist $\tang B=0$, $\cosec B=\infty$, $\cot. B=\infty$ mithin $c=(a-b)\infty$; $k=(b-a)\infty$, $\tang K=-0$, also $K=360°$, das heißt: die sphärische Epicycloide verwandelt sich in die gemeine innere, oder Hypocycloide.

§. 375.

Aufgabe: (Fig. 120 u. 121.)

Aus den gegebenen beyden Halbmessern a, b und dem Neigungswinkel B des Grund- und Erzeugungskreises den Halbmesser $BK = r$ der Kugel, in deren Oberfläche die sphärische Epicycloide fällt, zu bestimmen.

Auflösung:

$$BK^2 = BC^2 + CK^2 = AB^2 + AK^2$$
$$= b^2 + c^2 = a^2 + k^2, \text{ also}$$
$$r^2 = b^2 + (a \cosec. B - b \cot. B)^2$$
$$= a^2 + (b \cosec. B - a \cot. B)^2$$ (§. 374. Nr. 9 u. 12.)
$$r = \sqrt{[b^2 + (a \cosec. B - b \cot. B)^2]}$$
$$= \sqrt{[a^2 + (b \cosec. B - a \cot. B)^2]}$$

I. Zusatz:

Für $B=90°$, wird $\cosec. B=1$, u. $\cot. B=0$, also $r=\sqrt{(b^2+a^2)}$

II. Zusatz: Eben so läßt sich nun auch der Halbmesser FT des Parallelkreises bestimmen; denn in der gebrochenen Linie ABTFA ist A = F = 90°; nimmt man also AF zur Abscissenlinie, und A für ihren Anfangspunct, so ist für die Ecke T die rechtwinklichte Ordinate = FT, also

$FT = a \sin. A - 2b \sin. (B + A)$ (§. 5.)

$= a - 2b \cos. B.$

III. Zusatz: In den rechtwinklichten Dreyecken BAK, TFK ist ferner:

$BK : BA = 1 : \sin. BKA$, und

$TK : TF = 1 : \sin. TKF$, mithin

$$\text{Sin. } BKQ = \sin. BKA = \frac{BA}{BK};$$

$$\text{Sin. } TKQ = TKF = \frac{TF}{TK}.$$

Aus den beyden Centriwinkeln BKQ, und TKQ lassen sich nun die Bögen BQ, TQ, folglich auch der Bogen BcT = BQ — TQ (Fig. 121.) = TQ — BQ (Fig. 120.) bestimmen.

§. 376.

Aufgabe: (Fig. 120 u. 121.)

Aus den Halbmessern a, b und dem Neigungswinkel B des Grund- und Erzeugungskreises den sphärischen Streifen bestimmen, welcher die sphärische Epi-

cycloide bey einer vollendeten Umwälzung des ganzen Erzeugungskreises begränzet.

Auflösung:

1. Aus a, b und B berechne man den Halbmesser der Kugel $r = \sqrt{[b^2 + (a \operatorname{cosec.} B - b \cot. B)^2]}$ (§. 375.)
2. Durch den Mittelpunct K dieser Kugel lege man eine Ebene, so ist der Kugelschnitt ein größter Kreis (Geom. §. 252. I. Zus.)
3. Ferner berechne man den Halbmesser FT des Parallelkreises (§. 375. II. Zus.)
4. In dem größten Kugelkreise (Nr. 2.) ziehe man den beliebigen Durchmesser PQ, und nehme in demselben $KA = k = b \operatorname{cosec.} B - a \cot. B$ (§. 374 Nr. 12.); $KF = AK \mp AF = KA \mp FT = b \operatorname{cosec.} B - a \operatorname{coct.} B \mp 2b \sin. B$ (§. 373. V. Zus.)
5. Durch A und F lege man nun zwey Ebenen, auf welchen PA senkrecht steht, so sind die beyden Querschnitte zwey Parallelkreise der Kugel (Geom. §. 253. V. Zus.)
6. Für den Kreis durch A ist:

$$AB^2 = BK^2 - AK^2 = r^2 - k^2$$
$$= b^2 + (a \operatorname{cosec.} B - b \cot. B)^2$$
$$- (b \operatorname{cosec.} B - a \cot. B)^2$$
$$= b^2 + \frac{(a - b \cos. B)^2}{\sin. B^2} - \frac{(b - a \cos. B)^2}{\sin. B^2}$$

 =

$$= \frac{b^2 \sin. B^2 + a^2 - 2ab \cos. B + b^2 \cos. B^2}{\sin. B^2}$$

$$= \frac{b^2 - 2ab \cos. B + a^2 \cos. B^2}{\sin. B^2}$$

$$= \frac{a^2 \sin. B^2}{\sin. B^2} = a^2, \text{ also}$$

ist BDI der Grundkreis.

7. Ferner ist der andere Kreis durch F vom Grundkreise um AF = 2b sin. B (Nr. 4.) entfernt, mithin jener Kreis, dessen Peripherie der Erzeugungskreis immer berührt, so daß also

8. die sphärische Epicycloide zwischen diesen beyden Kreisen enthalten ist.

9. Wenn nun der Erzeugungskreis eine ganze Umwälzung vollendet hat, so hat er auf der Peripherie des Grundkreises einen Bogen hinterlegt, welcher seiner ganzen Peripherie gleich ist, bezeichnet nun P die Peripherie des Grund- und p jene des Erzeugungskreises, so ist

$$P : p = a : b, \text{ mithin } p = \frac{b}{a} P$$

10. Nimmt man also auf dem Grundkreise den Bogen $BDI = \frac{b}{a} P$, und legt durch die Pole zwey größte Kreise, wovon der eine durch B, der andere durch I geht, so ist

11.

11. der gesuchte Streifen BTGSIDB auf der Oberfläche der Kugel bestimmt.

Zusatz: Da jeder Kreis, welcher durch die Pole P, Q des Grundkreises, oder eines andern zum Grundkreis parallelen Kreises geht, ein größter Kreis ist, auf ihren Ebenen senkrecht steht, so kann man einen solchen Kreis der Kürze wegen einen Meridian dieser Parallelkreise nennen.

§. 377.

Aufgabe: (Fig. 122.)

Auf dem Stück BTKI einer sphärischen Gürtel ist die spärische Epicycloide BFuI verzeichnet, ferner ist auf dem durch den Anfangspunct B gelegten Meridian ein Punct M gegeben, man soll den Punct F der sphärischen Epicycloide bestimmen, welcher gegen den Grundkreis, eben dieselbe Lage hat.

Auflösung:

1. Für den Bogen BDI der Basis, und dem Bogen TGK des Parallelkreises, sey Q einer der beyden Pole, und BQ ein Bogen des Meridians, auf welchen der Punct M gegeben ist.

2. Man ziehe durch M zur Basis den Bogen MHFS eines Parallekreises, so wird solcher die Peripherie des Erzeugungskreises, welcher die Basis

in

in B berührt, in einem Puncte H schneiden, wodurch also vom Erzeugungskreise der Bogen BH bestimmt ist.

3. Auf der Basis nehme man nun den Bogen BD = dem Bogen BH, und

4. ziehe durch D den Bogen DQ eines Meridiankreises, welcher den durch M gezogenen Parallelkreis (Nr. 2.) in N schneidet.

5. Nimmt man endlich auf dem Bogen MN, das Stück NF = MH, so ist F der gesuchte Punct der sphärischen Epicycloide.

Beweis:

6. Wenn der Erzeugungskreis von B nach D kömmt, so rücket dessen Pol C nach E, zieht man also

7. durch D den Meridianbogen DQ, so geht er durch den Pol E, so wie der Meridianbogen BQ durch den Pol C (§. 373. VIII. Zus.)

8. Zieht man ferner durch H, F ebenfalls Meridiane der Parallelkreise, und legt durch C, H einen größten Kreisbogen, und eben so durch E, F, so erhält man zwey sphärische Dreyecke CQH, und EQF.

9. Nun ist der Bogen QC = QE, und QH = QN, weil Q der gemeinschaftliche Pol ist; ferner der Winkel CQH = EQF (Nr. 5. u. §. 373. IX. Zus.), mithin auch

10.

10. arc. CH = arc. EF (Sphär. Trigon. §. 386.)

11. Da nun C, E die Pole des Erzeugungskreises für die Stellen B und D sind, und H im Umfange dieses Kreises liegt, so fällt auch F in eben diesen Umfang.

12. Ferner ist nach Nr. 9. der sphärische Winkel QCH = QEF, also auch TCH = GEF, und

13. arc. TH = arc. FG (§. 373. IX. Zus.), mithin auch arc. DF = arc. BH = arc. BD (Nr. 3.); das ist

14. F ist der beschreibende Punct, wenn der Erzeugungskreis von B nach D kömmt, also ein Punct der sphärischen Epicycloide, und da ferner arc. QF = arc. QM so hat er mit M eben dieselbe Entfernung vom Pole des Grundkreises, also vom Grundkreise selbst, folglich ist F der gesuchte Punct der sphärischen Epicycloide.

I. Zusatz: Berühret der Erzeugungskreis den Grundkreis in I, und man theilet die halbe Peripherie des erstern, und vom letztern einen Bogen IV, welcher mit dieser halben Peripherie gleiche Länge hat, so, daß $I\alpha = IL$, $I\beta = IO$, $I\gamma = IP$, $I\delta = IR$, $I\varepsilon = IS$, $IK = IV$; zieht den Meridianbogen QI, und aus eben diesem Pole Q des Grundkreises mit $Q\alpha$, $Q\beta$, $Q\gamma$, $Q\delta$, $Q\varepsilon$,

QK

QK parallele Kreisbögen, welche den Meridianbogen Ql in a, b, c, d, e schneiden, verzeichnet noch die Meridianbögen QL, QO, QP, QR, QS, VQ, so daß ersterer den durch α gezogenen Parallelkreis in l, der zweyte den Parallelkreis durch β in o, der dritte den Parallelkreis durch γ in p, der vierte den Parallelkreis durch δ in r, der 5te den Parallelkreis durch ε in s, endlich der sechste den Parallelkreis durch K in u schneidet; nimmt endlich auf den Bögen dieser Parallelkreise $la^{I} = a\alpha$; $ob^{I} = b\beta$; $pc^{I} = c\gamma$; $rd^{I} = d\delta$; $se^{I} = e\varepsilon$, so sind a^{I}, b^{I}, c^{I}, d^{I} e^{I}, u Puncte der sphärischen Epicycloide, mithin

II. Zusatz: Je mehr man solche Puncte bestimmt, desto genauer läßt sich auf der Gürtel der Kugel die sphärische Epicycloide verzeichnen.

III. Zusatz: Je kleiner die Entfernung des Parallelkreises und Grundkreises in Beziehung auf den Halbmesser der Kugel, das ist, je kleiner TE $= 2b \sin. B$ (§. 373. V. Zus.) in Hinsicht $r = \sqrt{[b^2 + (a \operatorname{cosec.} B - b \cot. B)^2]}$ (§. 375.) desto mehr nähert sich die zwischen dem Grundkreise BDI, und dem Parallelkreise TGS (Fig. 120 u. 121.) enthaltene Kugelgürtel der krummen Seiten-

tenfläche eines abgekürzten Kegels (Geometrie §. 271.), mithin auch der Meridianbogen BcT dem Durchmesser BCT des Erzeugungskreises (Geom. §. 110. III. Zus.)

IV. Zusatz: Wenn also der Halbmesser r der Kugel in Beziehung auf den Abstand TE sehr groß ist, so ist der Fehler unbedeutend, wenn man den zwischen dem Grund- und Parallelkreis enthaltenen Streifen der Kugel, in welchem die sphärische Epicycloide enthalten ist, für die krumme Seitenfläche eines abgekürzten Kegels nimmt.

§. 378.

Aufgabe:

Aus den gegebenen Halbmessern a, b und dem Neigungswinkel B des Grund- und Erzeugungskreises die sphärische Epicycloide zu verzeichnen, wenn man die Kugelgürtel, in welcher diese Epicycloide enthalten ist, als die krumme Seitenfläche eines abgekürzten Kegels betrachten darf.

Auflösung:

1. In Beziehung auf die Neigung B giebt es drey Fälle, es kann nemlich B ein stumpfer, ein spitziger, oder ein rechter Winkel seyn.

I. Fall

I. Fall, wenn B > 90°. (Fig. 120.)

2. In der Neigungsebene TBI bildet ABTF ein Trapez, verlängert man daher die beyden Seiten TB, FA gegen die kleinere Parallele BA zu, so stossen sie in R zusammen (Geom. §. 51. X. Zus.), so daß also R die Spitze des gleichseitigen Kegels TRS ist, in dessen krummen Seitenfläche die Kugelgürtel, mithin auch die sphärische Epicycloide fällt.

3. Aus B ziehe man auf FT die senkrechte Be, so ist Te = FT — AB = (a—2b cos. B) — a (§. 375. II. Zus.)
= 2b cos. B, weil cos. B negativ ist

4. Ferner ist ΔTBe ∽ ΔBRA, mithin
Te : TB = AB : BR, das ist
2b cos. B : 2b = a : BR, also

5. $BR = \frac{a}{\cos. B} = a \sec. B$, und
$TR = TB + BR = 2b + a \sec. B$

6. Nun ist die krumme Seitenfläche des Kegels TRS einem Kreisausschnitte gleich; dessen Halbmesser die Seite des Kegels also TR, und dessen Bogen die ganze Peripherie des Kreises TGS=2FTπ = 2 (a + 2b cos. B) π (§. 375. II. Zus.) ist. (Geom. §. 266. I. Zus.)

7. Eben so gleicht die krumme Seitenfläche des Kegels BRI einem Kreisausschnitte, welcher BR zum Halbmesser, und die Peripherie des Grundkreises $= 2 a \pi$ zu seinem Bogen hat.

8. Mit RB, RT verzeichne man daher zwey concentrische Kreise, und nehme auf dem größern die Länge $= 2 \, FT \pi$ (Nr. 6.), ziehe die Radien an die Endespuncte dieses Bogens, so ist der Kreisausschnitt bestimmt, und dadurch sowohl die krummen Seitenflächen der beyden Kegel, als des abgekürzten, mithin der sphärischen Gürtel verzeichnet.

9. In der Ebene dieses Kreisausschnittes beschreibe man auf der erhabenen Seite des kleinern Kreises als Basis eine äussere gewöhnliche Epicycloide (§. 360.), deren Erzeugungskreis b zum Halbmesser hat.

10. Lege endlich den Kreisausschnitt um den entsprechenden Kegel, so bildet der kleinere Kreisbogen die Basis, der größere den Parallelkreis TGS, und die verzeichnete gemeine Epicycloide erhält die Form der verlangten sphärischen Epicycloide.

II. Fall, wenn $B < 90°$. (Fig. 121.)

11. In diesem Falle schneiden sich die Seiten BT, AF gegen die Seite der Parallele TF zu; und

FT

$FT = a - 2b \cos. B$, $BE = a - (a - 2b \cos. B)$
$= 2b \cos. B$

12. $BE : BT = BA : BR$, oder
$2b \cos. B : 2b = a : BR$, also

13. $BR = \frac{a}{\cos. B} = a \sec. B$, und
$TR = BR - BT = a \sec. B - 2b$

14. Durch ähnliches Verfahren wie Nr. 6—9. verzeichne man den Kreisausschnitt, und in diesem über der hohlen Seite des größern Bogens als Basis aus BR und b eine gemeine innere Epicycloide (§. 360.)

15. Wird nun wieder der Ausschnitt um den entsprechenden Kegel gelegt, so erhält die innere Epicycloide die Form der verlangten sphärischen Epicycloide.

III. Fall, wenn $B = 90°$.

16. Nun lauffen BT und AF parallel, und der abgekürzte Kegel wird ein Cylinder, dessen Grundfläche der Basis, und dessen Höhe dem Durchmesser des Erzeugungskreises gleich ist.

17. Man verzeichne also ein Rechteck, und gebe demselben die Grundlinie $= 2a\pi$, und die Höhe $= 2b$, so ist solches der krummen Seiteenfläche dieses Cylinders gleich (Geom. §. 262.)

18. Verzeichnet man also aus dem Erzeugungskreise über der Grundlinie eine Cycloide (§. 360. II. Zus.), und legt das Rechteck um den Cylinder, so erhält die Cycloide die Form der verlangten sphärischen Epicycloide.

§. 379.

Lehrsatz: (Fig. 123.)

Für einem beliebigen Punct M der sphärischen Epicycloide BMO, wenn man durch diesen Punct M, und den Berührungspunct D der Basis und des Erzeugungskreises, einen größten Kugelkreis legt, so steht der Bogen DM auf der Epicycloide in M senkrecht.

Beweis:

1. Der Bogen BF des Grundkreises sey der halben Peripherie des erzeugenden Kreises gleich, so daß der beschreibende Punct, welcher anfangs die Basis in B berührt, nach einer halben Umwälzung des erzeugenden Kreises nach S, und der Berührungspunct nach F kömmt.

2. Für den Punct M der Epicycloide sey D der Berührungspunct des erzeugenden Kreises.

3. Aus dem Pole Q des Grundkreises beschreibe man auf der Oberfläche der Kugel mit dem Bogen QM einen Parallelkreis MNL, ziehe

4.

4. die Meridianbögen QB, QM, QL, QD, QF. (§. 376. Zus.)

5. Letztere beyden Bögen gehen nun verlängert, der eine durch den Pol C des erzeugenden Kreises über D, und der andere durch den Pol E eben dieses Kreises über F (§. 373. VIII. Zus.), und schneiden den gezogenen Parallelkreis in N, V.

6. Legt man durch M, C sowohl, als durch L, E einen größten Kreis, so sind die Bögen CM, CD, EL, EF einander gleich, und stehen auf der Peripherie des erzeugenden Kreises senkrecht, (Geom. §. 253 u. 379)

7. In den beyden sphärischen Dreyecken MQC, LQE, sind die Bögen CM = EL, MQ = LQ, CQ = EQ, mithin auch die Winkel QCM = QEL, oder DCM = FEL, und CQM = EQL, oder DQT = FQR

8. Da die Bögen MhD, LIF das Maaß der gleichen Winkel DCM, und FEL sind (§. 373. IX. Zus.), so ist

9. arc. MhD = arc. FiL.

10. Eben so ist arc. TQ = DQ = RQ = FQ, und DQT = RQF (Nr. 7.), also

11. DT = FR, folglich

12.

12. TR = DF

13. Ferner ist vermöge der wälzenden Bewegung
arc. BD = arc. DhM = arc. FiL (Nr. 9.)
arc. BF = arc. FLS (Nr. 1.), mithin
arc. BF — arc. BD = arc. FLS — arc. FiL, das ist

14. arc. DF = arc. LS, oder
arc. TR = arc. LS (Nr. 12.)

15. Da die Bögen TR, ML der beyden Parallelkreise ähnlich sind, so verhalten sie sich wie die Halbmesser dieser Parallelkreise, mithin wie die Sinus der zwischen ihnen und dem Pole enthaltenen Bögen der Meridiane (§.373. IX.u.X.Zus.), das ist

16. ML : TR = sin. MQ : sin. DQ, oder

17. ML : LS = sin. MQ : sin. DQ (Nr. 14.).

18. Zieht man zu ML unendlich nahe einen Parallelkreis, welcher die Peripherien des erzeugenden Kreises in m, l und die Epicycloide in μ schneidet, so ist

19. lL = mM; und da die beyden Bögen ML, ml unendlich nahe einander sind, so ist ihr Unterschied unendlich klein, man kann daher ml = ML setzen.

20. Eben so wie Nr. 17. ist nun ferner

μl:

$\mu l : lS = \sin. MQ : \sin. DQ$, und daher (Nr. 17.)
$\mu l : lS = ML : LS$, also

21. $(ML - \mu l) : (LS - lS) = \sin. MQ : \sin. DQ$, folglich

22. $m\mu : mM = \sin. MQ : \sin. DQ$ (Nr. 19.)

23. Die unendlich kleinen Bögen lassen sich als Stückchen ihrer Tangenten, also das $\Delta mM\mu$ als ein geradlinigtes betrachten, mithin ist

24. $m\mu : mM = \sin. mM\mu : \sin. m\mu M$, folglich $\sin. mM\mu : \sin. m\mu M = \sin. MQ : \sin. DQ$ (Nr. 22.)

25. Legt man durch die Punncte D, M einen größten Kugelkreis, so ist im sphärischen Dreyecke DQM $\sin. MQ : \sin. DQ = \sin. MDQ : \sin. DMQ \leq$ $= \sin. MDC : \sin. DMQ$ (Sphär. Trig. §. 381. V. Zus. u. §. 410.), mithin

26. $\sin. mM\mu : \sin. m\mu M = \sin. MDC : \sin. DMQ$

27. Nun ist $m\mu M = \mu MN$ (Geom. §. 45. III. Zus.) ferner im sphärischen Dreyecke MCD, der Bogen $CM = CD$ (Nr. 6.), mithin auch $MDC = CMD$ (Sphär. Trig. §. 410.), folglich

28. $\sin. mM\mu : \sin. \mu MN = \sin. CMD : \sin. DMQ$, und

29.

29. sin. $mM\mu$: sin. CMD = sin. μMN : sin. DMQ.

30. Im gleichschenklichten sphärischen Triangel MCD (Nr. 27.) fällt ein von C auf MD gezogener Perpendikel CH zwischen die Schenkel CM, CD (Sphär. Trig. §. 395.), ferner ist offenbar DM < 180°, mithin auch $\frac{1}{2}$ DM, das ist HM < 90°, und eben so ist CM < 90° (§. 373. XI. Zus.), folglich ist der Winkel CMD spitzig (Sphär. Trig. §. 391. IV. Zus.)

31. Der Bogen CM steht auf dem Erzeugungskreis senkrecht (Nr. 6.), also ist:

$mM\mu + \mu MC = mMC = 90°$, mithin

32. sin. $mM\mu$ = cos. μMC, und

33. der Winkel μMC ist spitzig.

34. Eben so steht MQ auf dem Parallelkreise MNL, durch dessen Pole er geht, senkrecht (Sphär. Trig. §. 379.), mithin ist

QMD + DMN = 90°, also

35. sin. QMD = cos. DMN, und

36. der Winkel DMN spitzig.

37. Setzet man nun aus Nr. 32. u. 35. statt den Sinussen die Cossinusse in die Proportion Nr. 29, so wird

38. cos. μMC : sin. CMD = sin. μMN : cos. DMN

39. Ferner ist offenbar

$\mu MC + CMD = \mu MN + NMD = mMD$

40. Man setze der Kürze wegen

$\mu MC = \alpha$, $CMD = \beta$, $\mu MN = \gamma$, $NMD = \delta$, $\mu MD = u$

so ist nach Nr. 39.

41. $\alpha + \beta = u$, also $\alpha = u - \beta$

$\gamma + \delta = u$; $\gamma = u - \delta$

42. Ferner $\cos. \alpha : \sin. \beta = \sin. \gamma : \cos. \delta$ (Nr. 38.), oder

$\cos. (u - \beta) : \sin. \beta = \sin. (u - \delta) : \cos. \delta$

$(\cos. u \cos. \beta + \sin. u \sin. \beta) : \sin. \beta$

$= (\sin. u \cos. \delta - \cos. u \sin. \delta) : \cos. \delta$

(Trigon. §. 307 u. 309., mithin

43. $\cos. u \cos. \beta \cos. \delta + \sin. u \sin. \beta \cos. \delta$

$= \sin. u \sin. \beta \cos. \delta - \cos. u \sin. \beta \sin. \delta$;

$\cos. u \cos. \beta \cos. \delta = - \cos. u \sin. \beta \sin. \delta$,

also

44. $\cos. u (\cos. \beta \cos. \delta + \sin. \beta \sin. \delta) = 0$

45. In diesem Producte ist also nothwendig einer der beyden Factoren $= 0$,

46. die beyden Winkel β, δ, das ist CMD, NMD sind spitzig (Nr. 30 u. 36.), daher sind sowohl die Sinus als Cosinus derselben positiv, folglich

kann

kann die Summe der in den Klammern enthaltenen 2 Producte nicht = o seyn.

47. Nothwendig ist daher cos. u = o, folglich u = μMD (Nr. 40.) = 90°, das ist

48. Der Kreisbogen DM steht in M auf der sphärischen Epicycloide BMO senkrecht.

I. Zusatz: Da die sphärische Epicycloide ganz in die Oberfläche der Kugel fällt, so steht auch in M der Halbmesser der Kugel auf der Epicycloide senkrecht; zieht man daher in der Ebene des durch D und M gelegten größten Kugelkreises nach M den Halbmesser, so steht das Element der Epicycloide Mμ auf selben und dem Bogen MD, mithin auf der Ebene dieses Kugelkreises senkrecht. (Geom. §. 163.)

II. Zusatz: Legt man also durch einen Punct M der sphärischen Epicycloide und den entsprechenden Berührungspuncte D des Erzeugungs- und Grundkreises einen größten Kugelkreis, errichtet durch M auf die Ebene desselben eine senkrechte gerade Linie, so hat solche mit dem Elemente Mμ einerley Richtung, und ist daher die Tangens der sphärischen Epicycloide in M.

Verzeichniß der Druckfehler.

Seite	Zeile	statt	lies
418	10	Np	mp
424	14	vollständige	unvollständige
432	14 u. 20	sin. $(m+n)$	sin. $(m+n)z$
443	5	$(a^2-x^2)^{-1}$	$(a^2+x^2)^{-1}$
365	15	∞	$\int$
468	3 von unten	Subnormal	Subtangens
474	7	dxdy dz	— dxdy dz
—	13	dz^2	dz
—	14	dz	d^2z
479	24	$P=y$	$PM=y$
480	16	$(PM+po)$	$\frac{1}{2}(PM+po)$
485	9	DC : DC	Dc : DC
486	2 von unten	bAH >	bAH <
487	25	einer	eines
505	2	$x=\frac{1}{4}p$	$a=\frac{1}{4}p$
508	12	$\frac{y}{p}\surd(\frac{1}{4}p^{\sqsupset}$	$\frac{y}{p}\surd(\frac{1}{4}p^2$

508

Seite	Zeile	statt	lies
508	3 von unten	$(1+\sqrt{2}^2$	$(1+\sqrt{2})^2$
510	10	$2 \sin. \alpha^2$	$2 \sin. \alpha^3$
511	16	$\frac{2 m^3 \sin. \alpha^2}{3p}$	$\frac{2 m^3 \sin. \alpha^3}{3p}$
529	11	$\frac{c u^2}{a^2}$	$\frac{c^2 u^2}{a^2}$
533	3 von unten	$fMQ -$	$fMQ =$
537	6	$\frac{s^2}{z^2}$	$\frac{s^2}{t^2}$
548	3	$8a^3 (px - \frac{px^2}{a})$	$4a^2 (px - \frac{px^2}{a})$
—	—	Am Ende des ganzen Bruches soll noch als Factor dx^2 stehen.	
—	6	$8a^3 (px - \frac{px^2}{a})$	$2a\sqrt{}(px - \frac{px^2}{a})$
560	3 von unten	$\log. nat. \frac{2e}{c}$	$\log. nat. (1 + \frac{2e}{c})$
562	1	$\frac{a c^2 \pi}{4e} +$	$\frac{a c^2 \pi}{4e} =$
584	10	$-8a^3$	$4a^2$
591	5	A	C
599	6	F	E
609	1, 2 u. 6	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
610	1 u. 3	$\frac{1}{8}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$

Seite	Zeile	statt	lies
618	2 u. 3	$-\frac{1}{3}y^2$	$+\frac{1}{3}y^2$
622	2 von unten	$-2fl$	$-\frac{1}{2}fl$
623	14	$+\frac{1}{6}l^3$	$+\frac{1}{6}l^2$
636	16	$\frac{258}{6}$	$\frac{258}{9}$

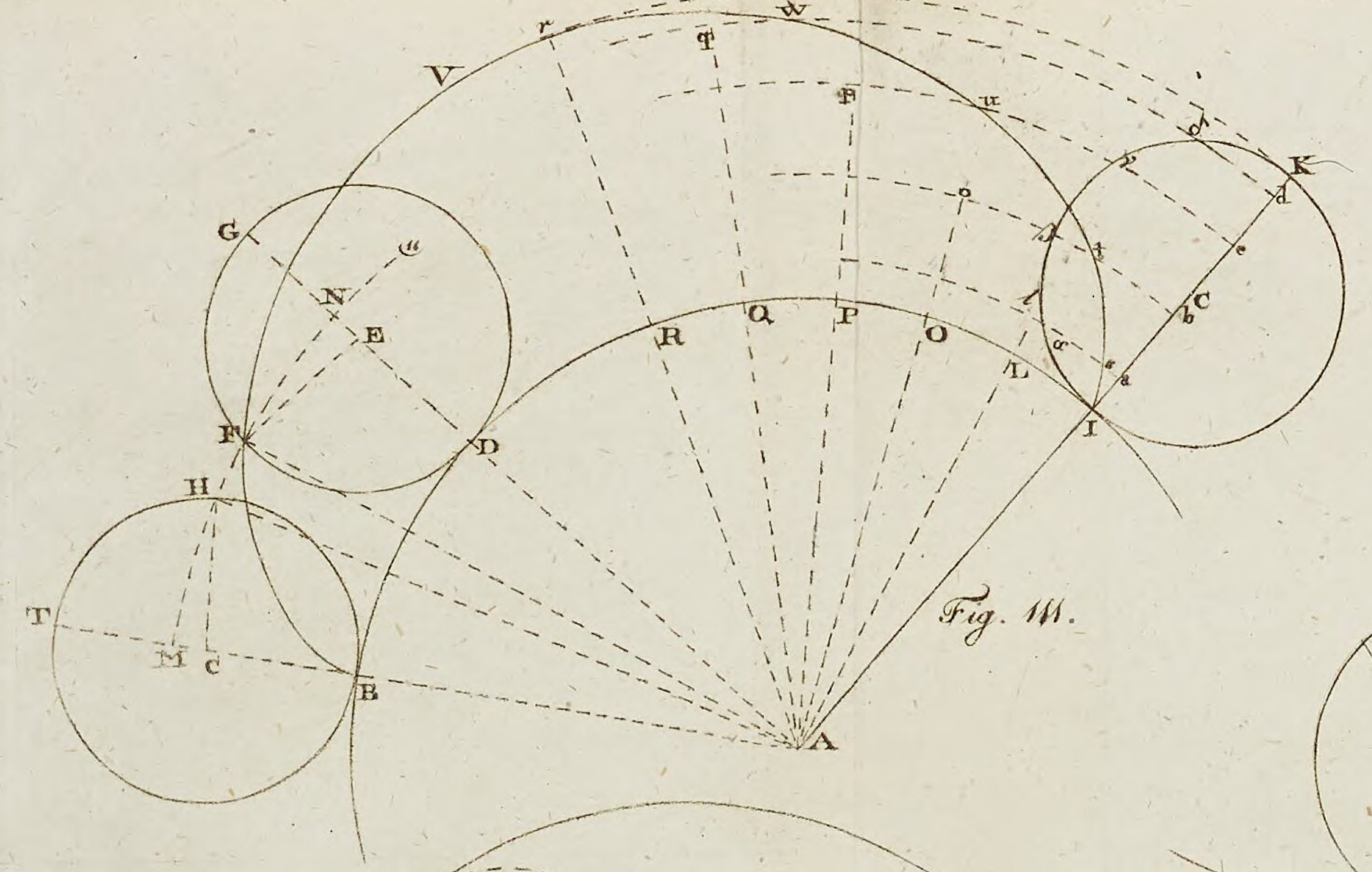

Fig. 111.

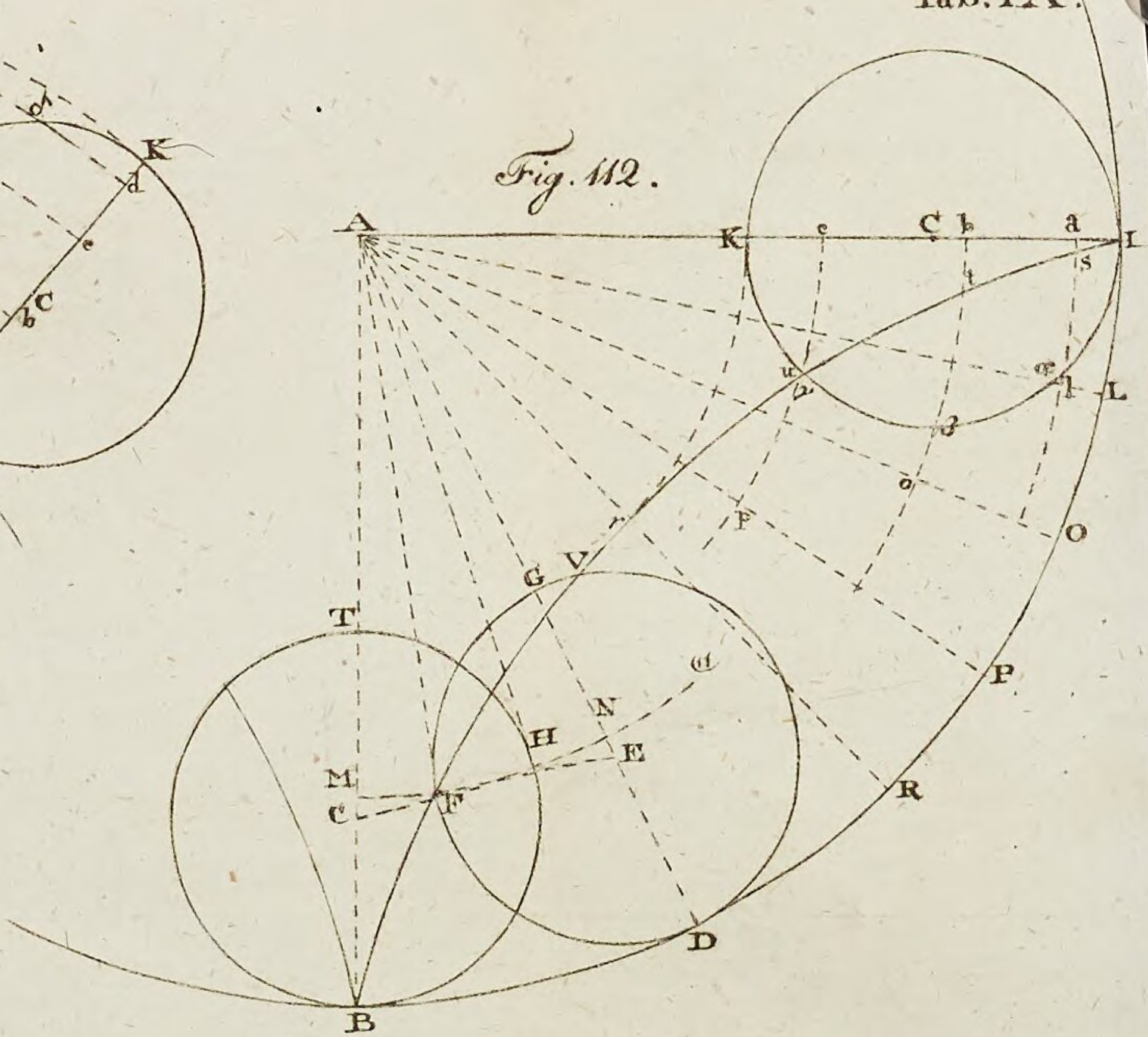

Fig. 112.

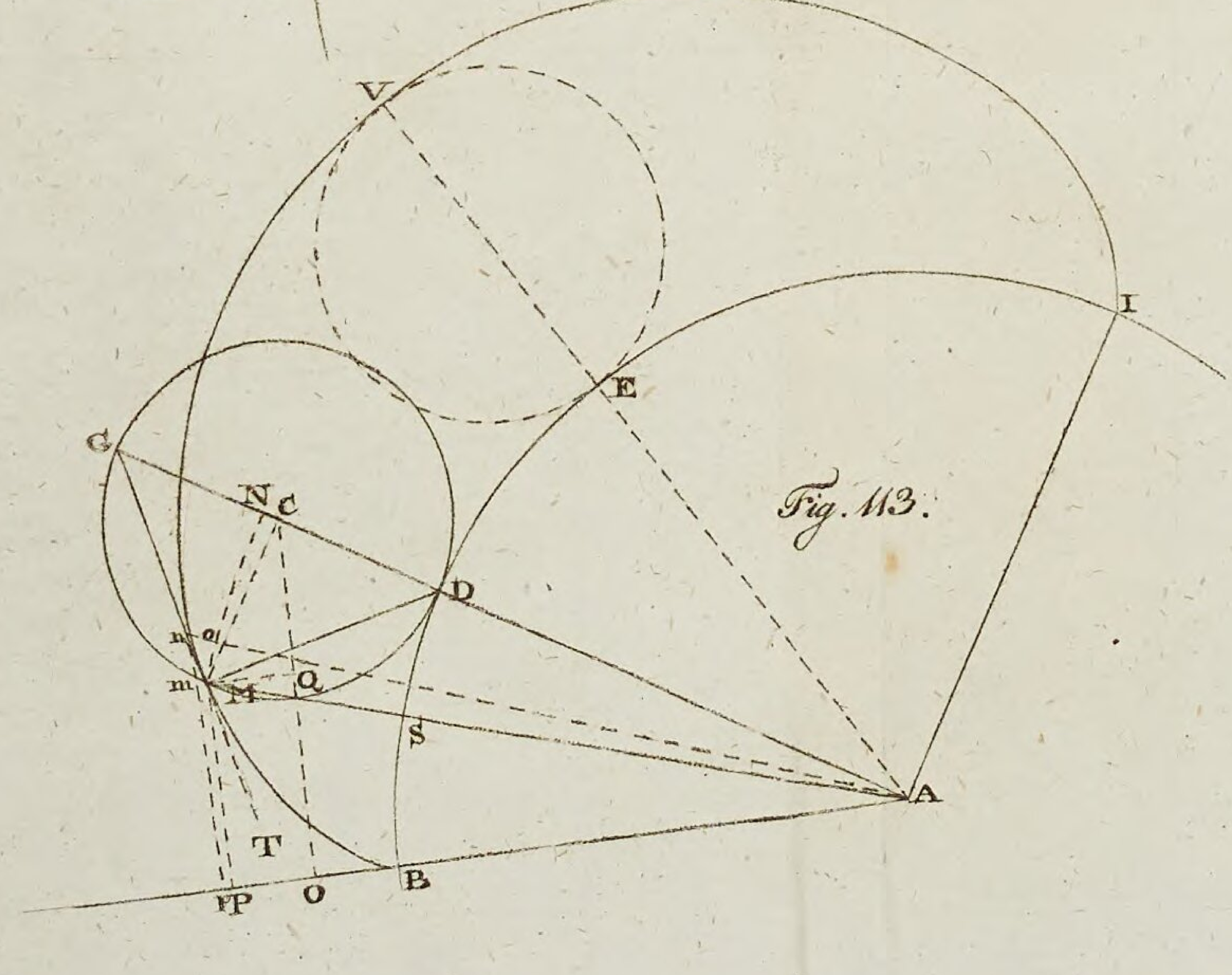

Fig. 113.

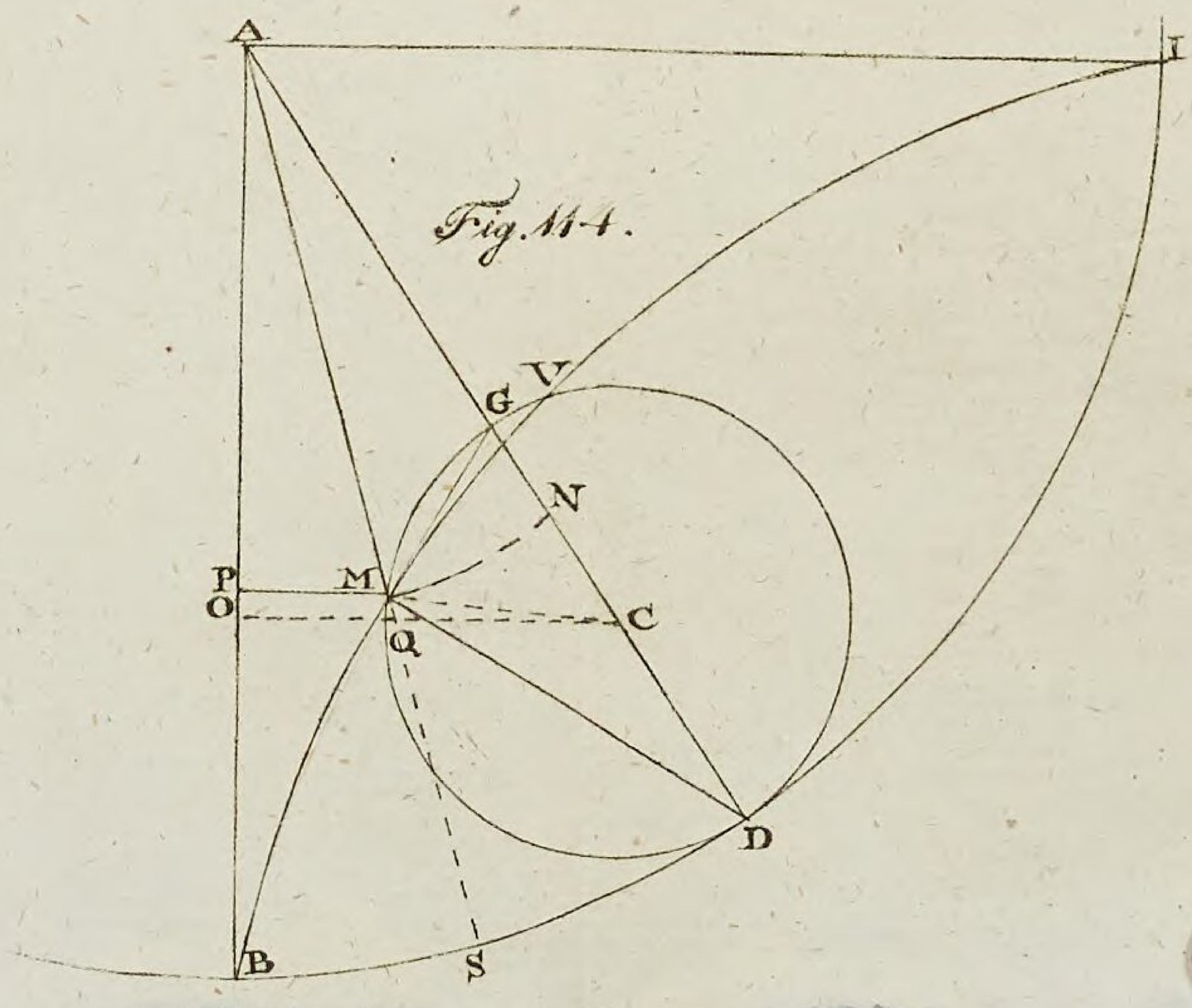

Fig. 114.

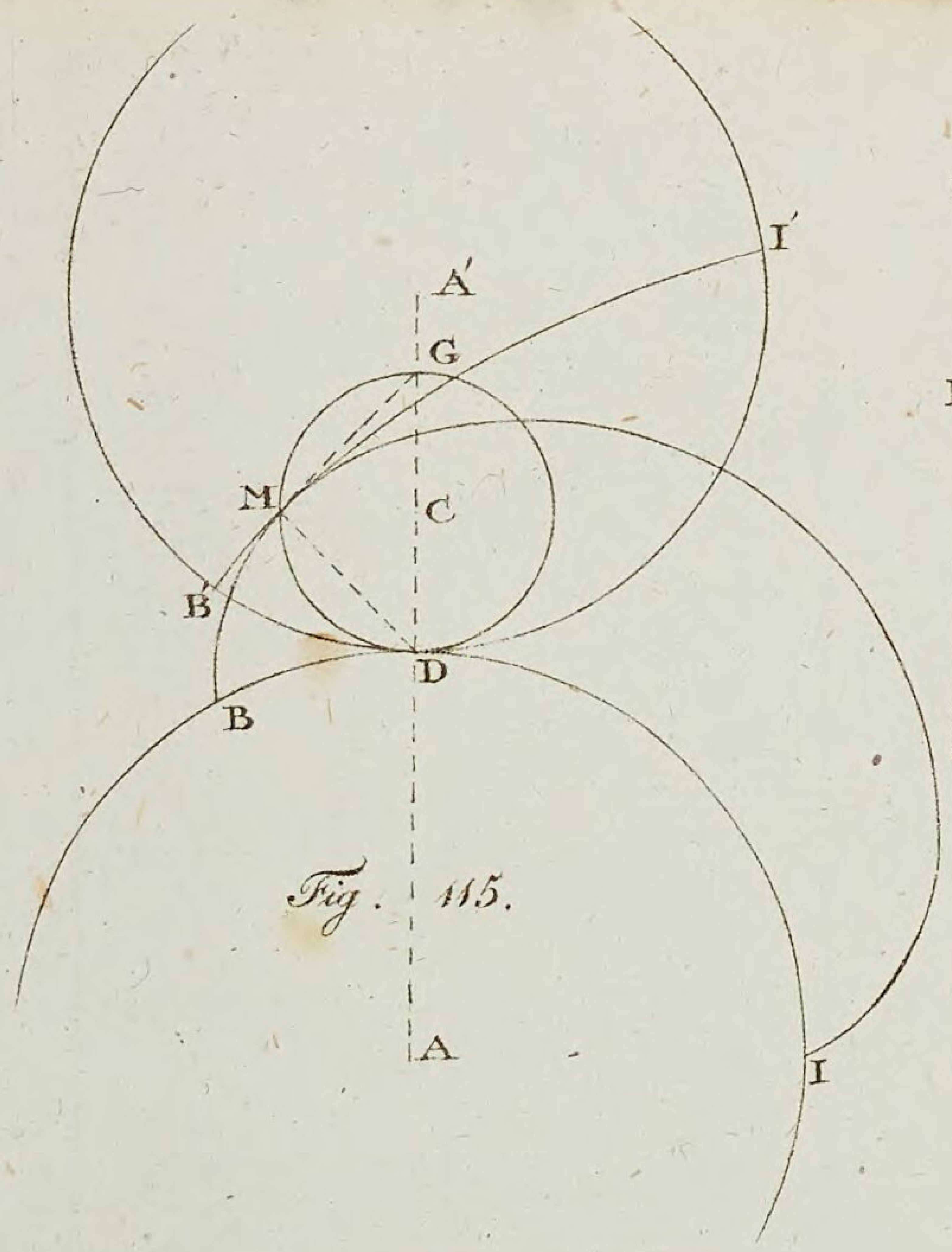

Fig. 115.

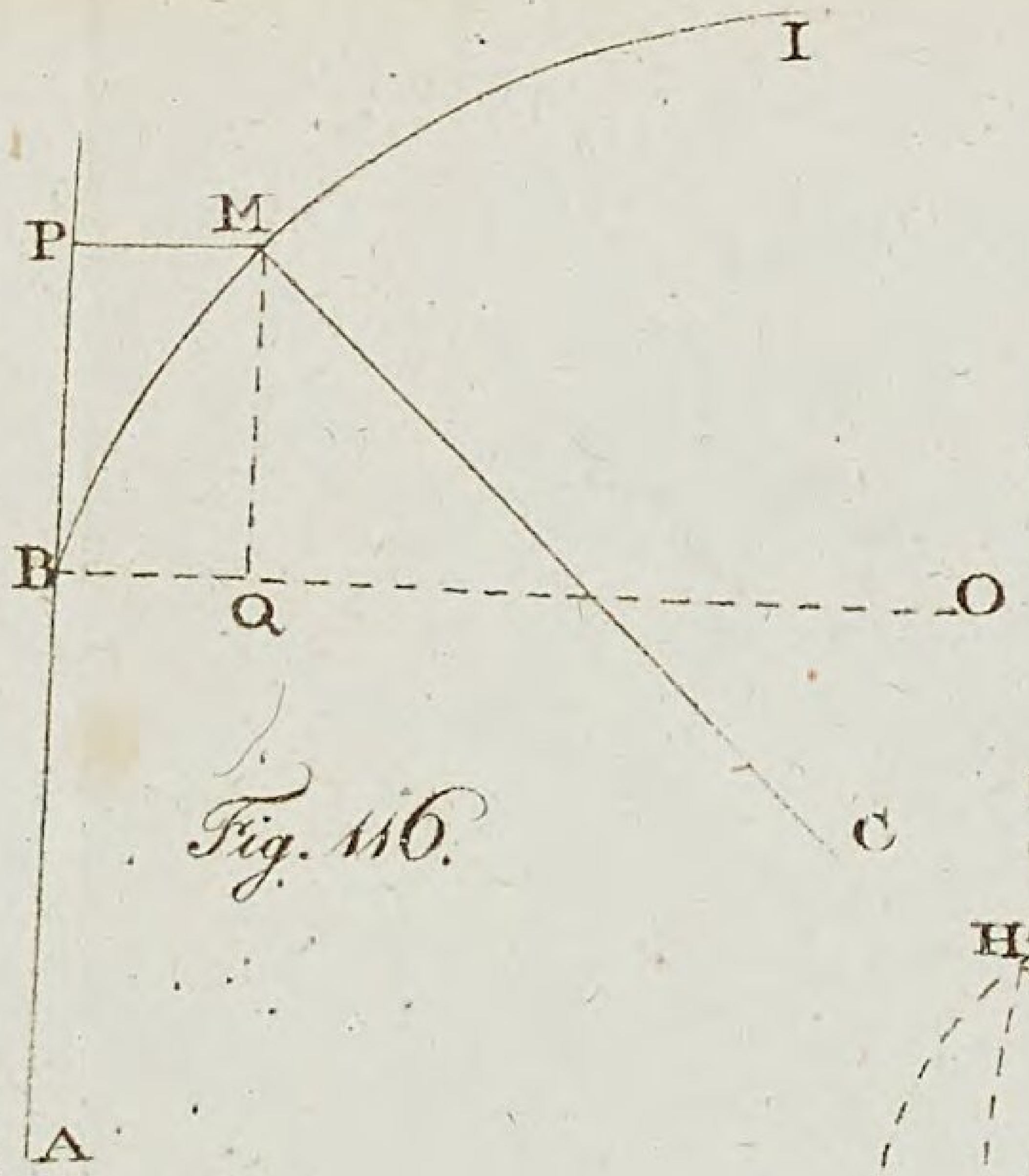

Fig. 116.

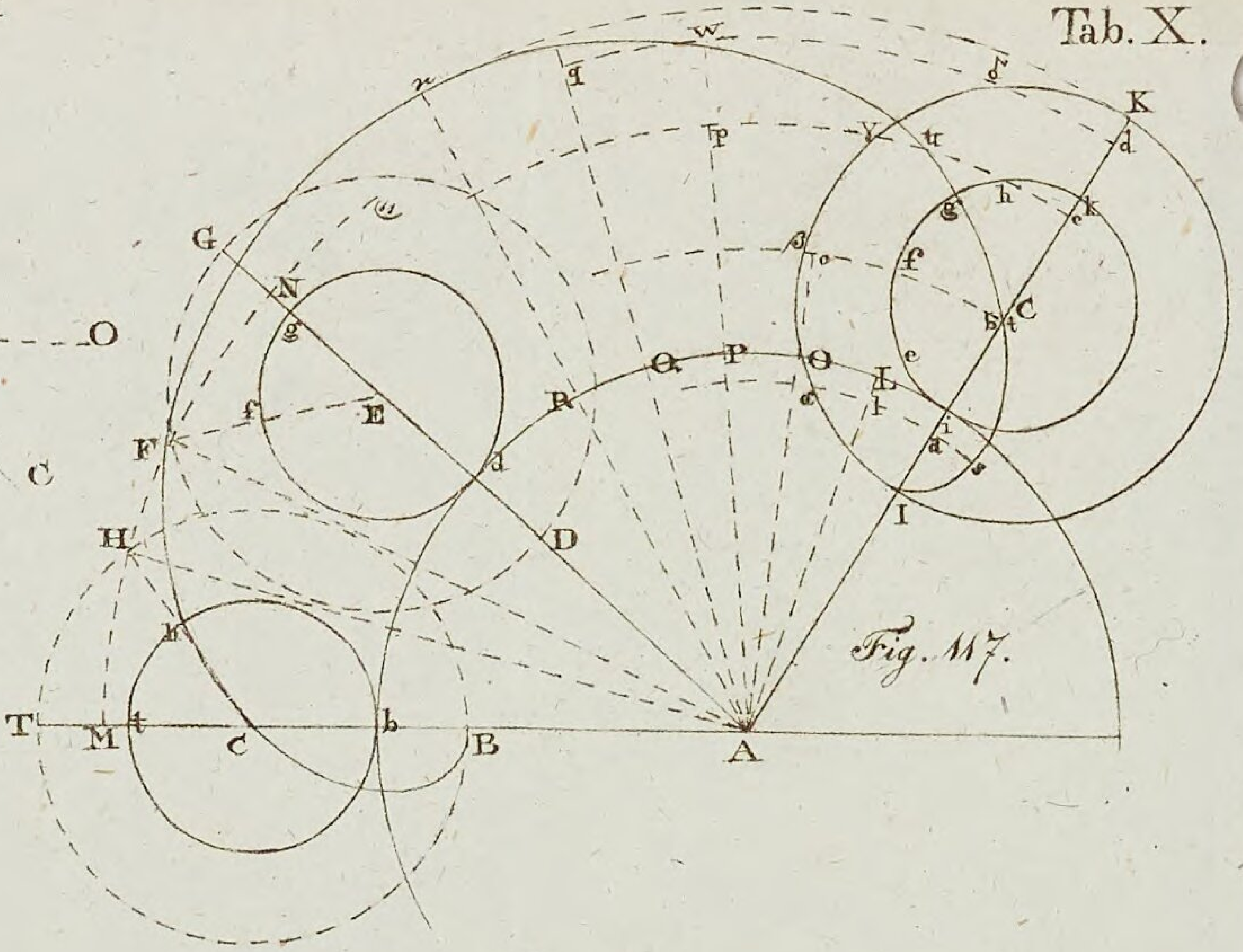

Fig. 117.

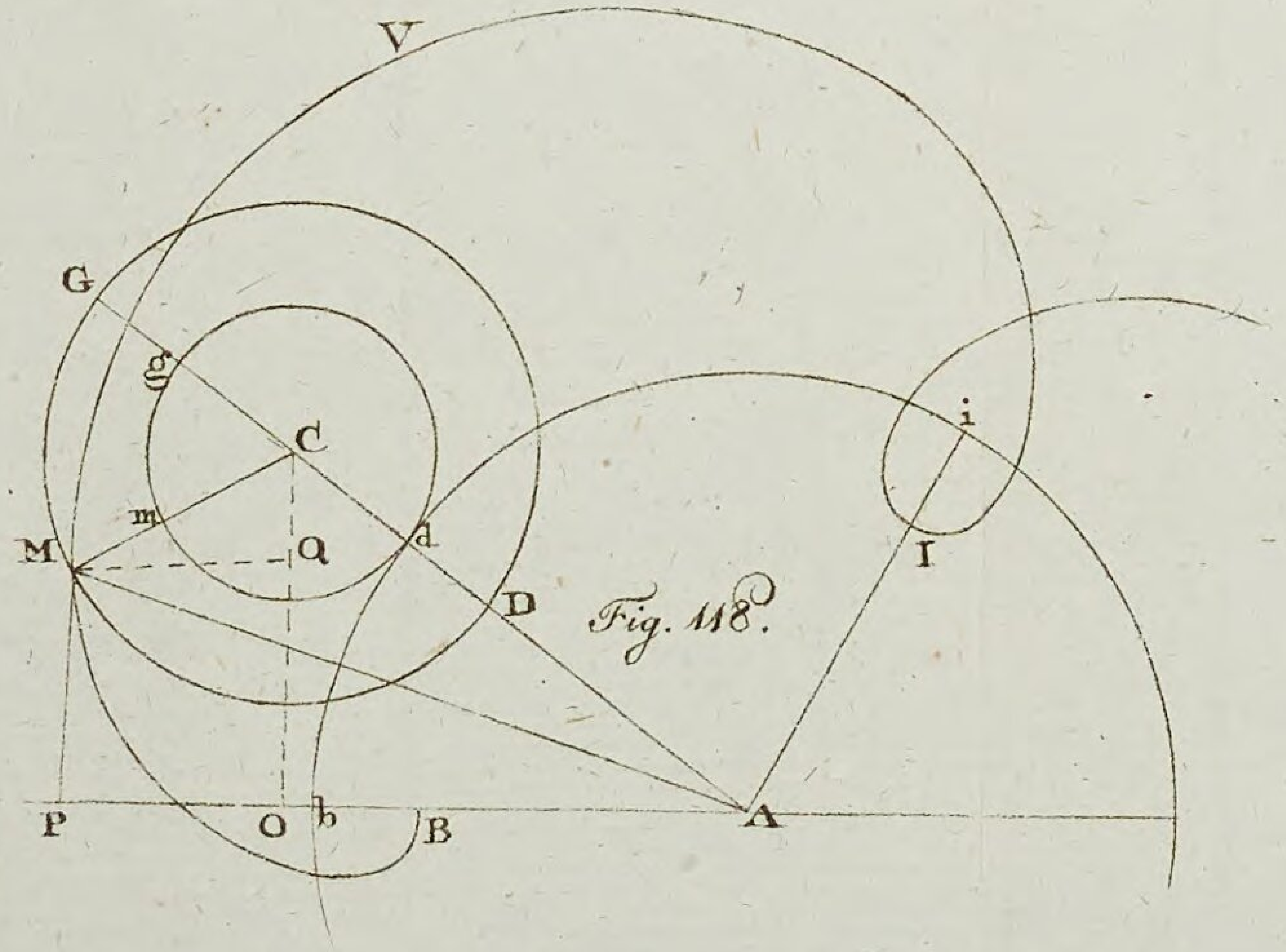

Fig. 118.

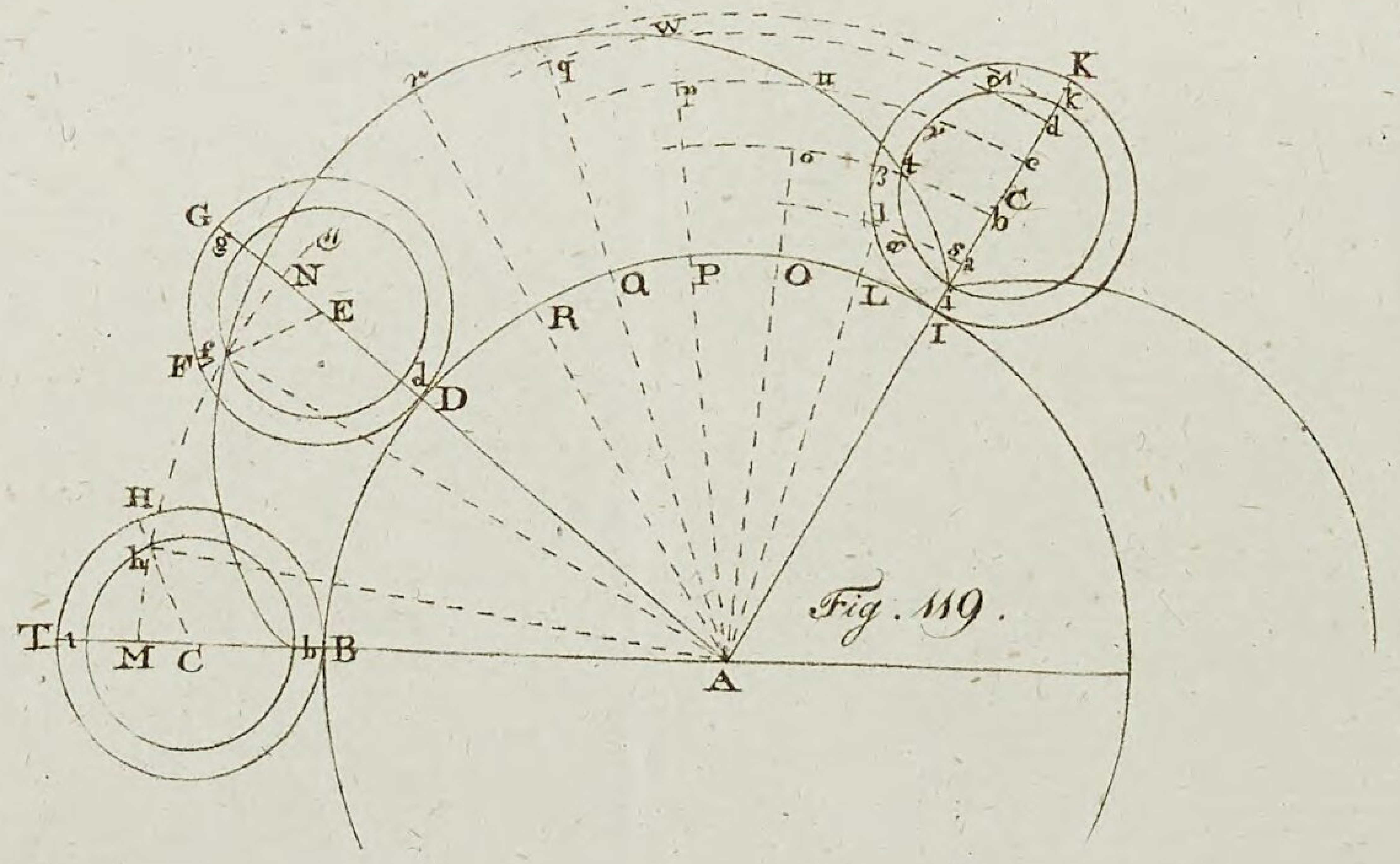

Fig. 119.

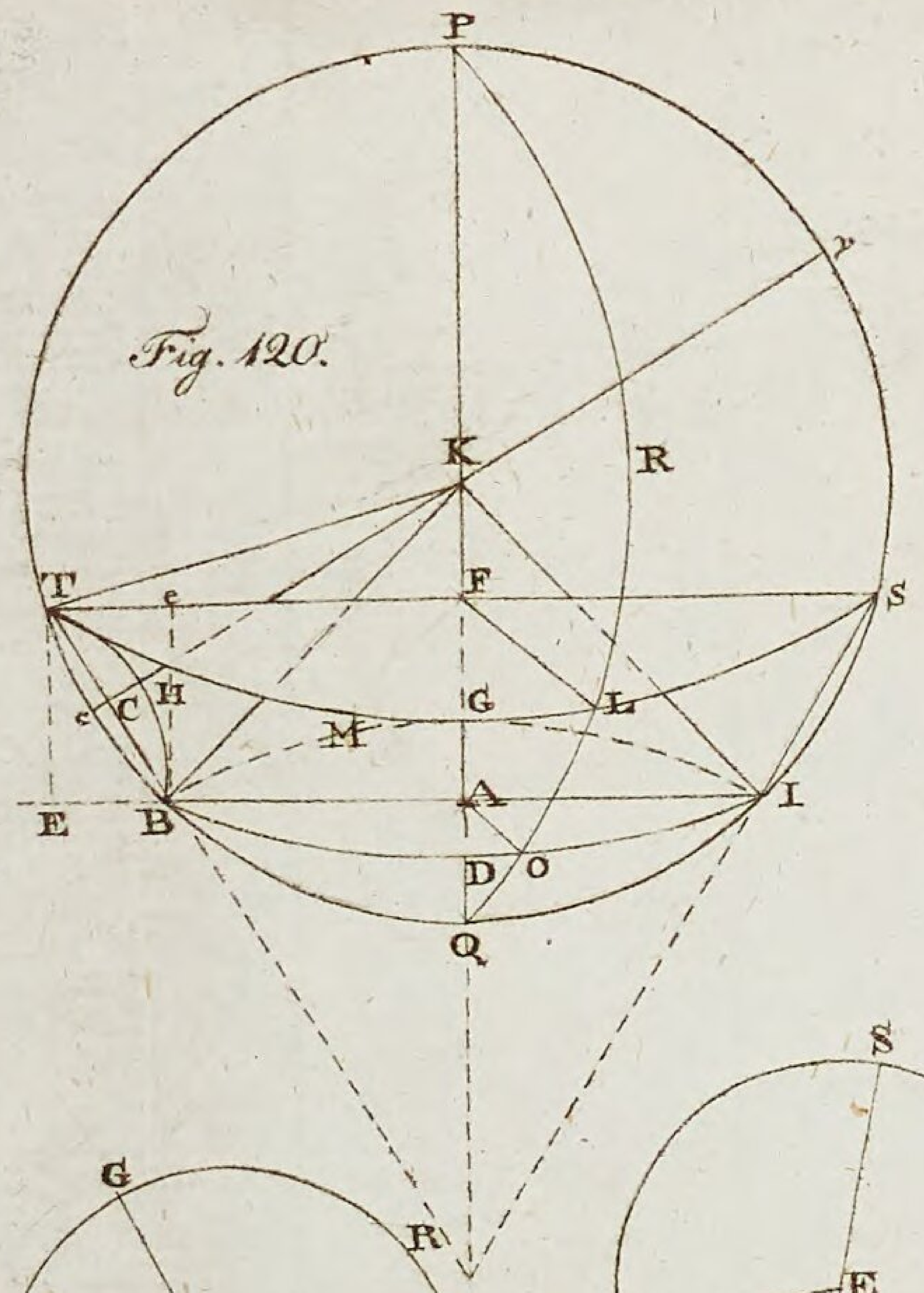

Fig. 120.

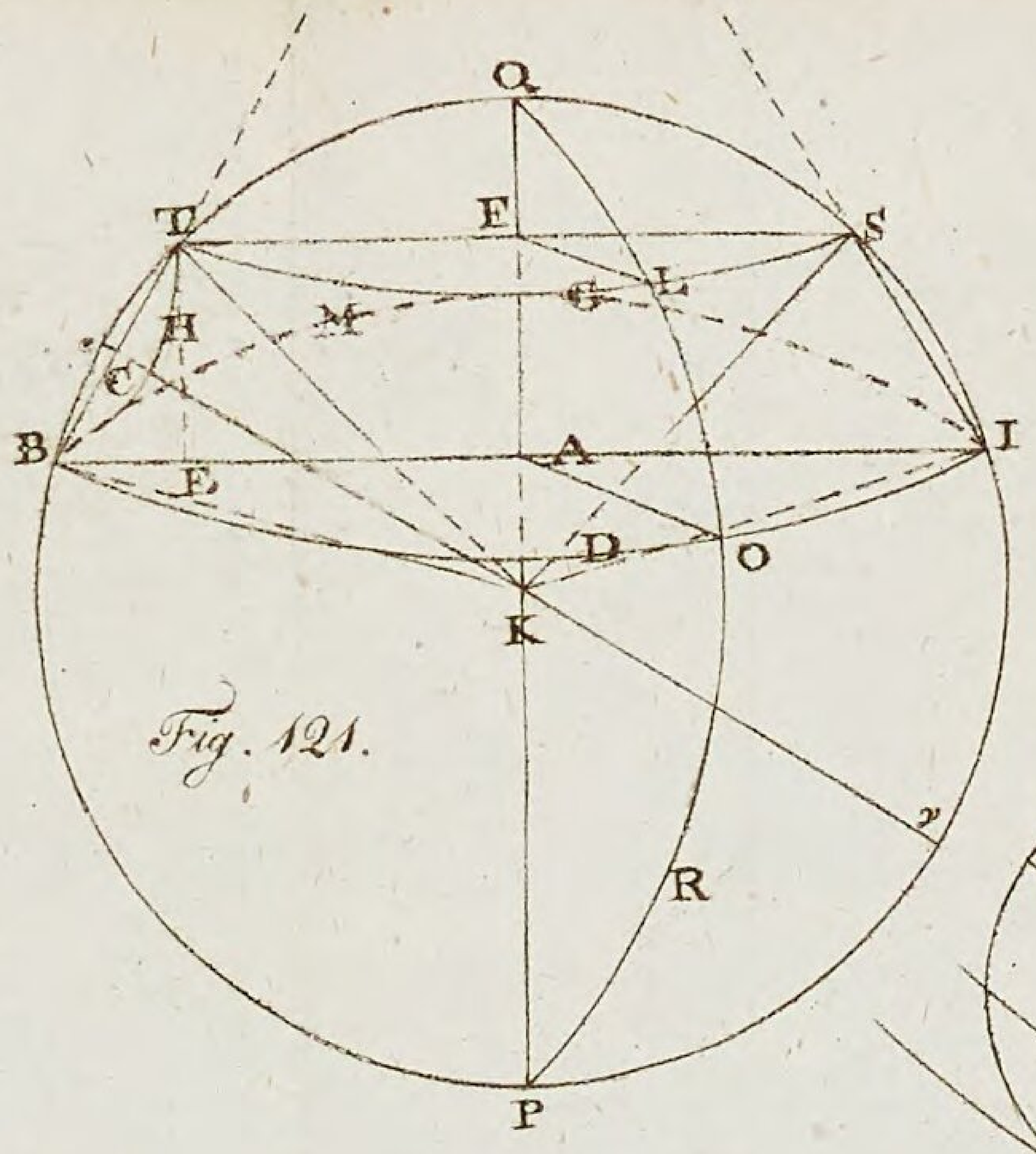

Fig. 121.

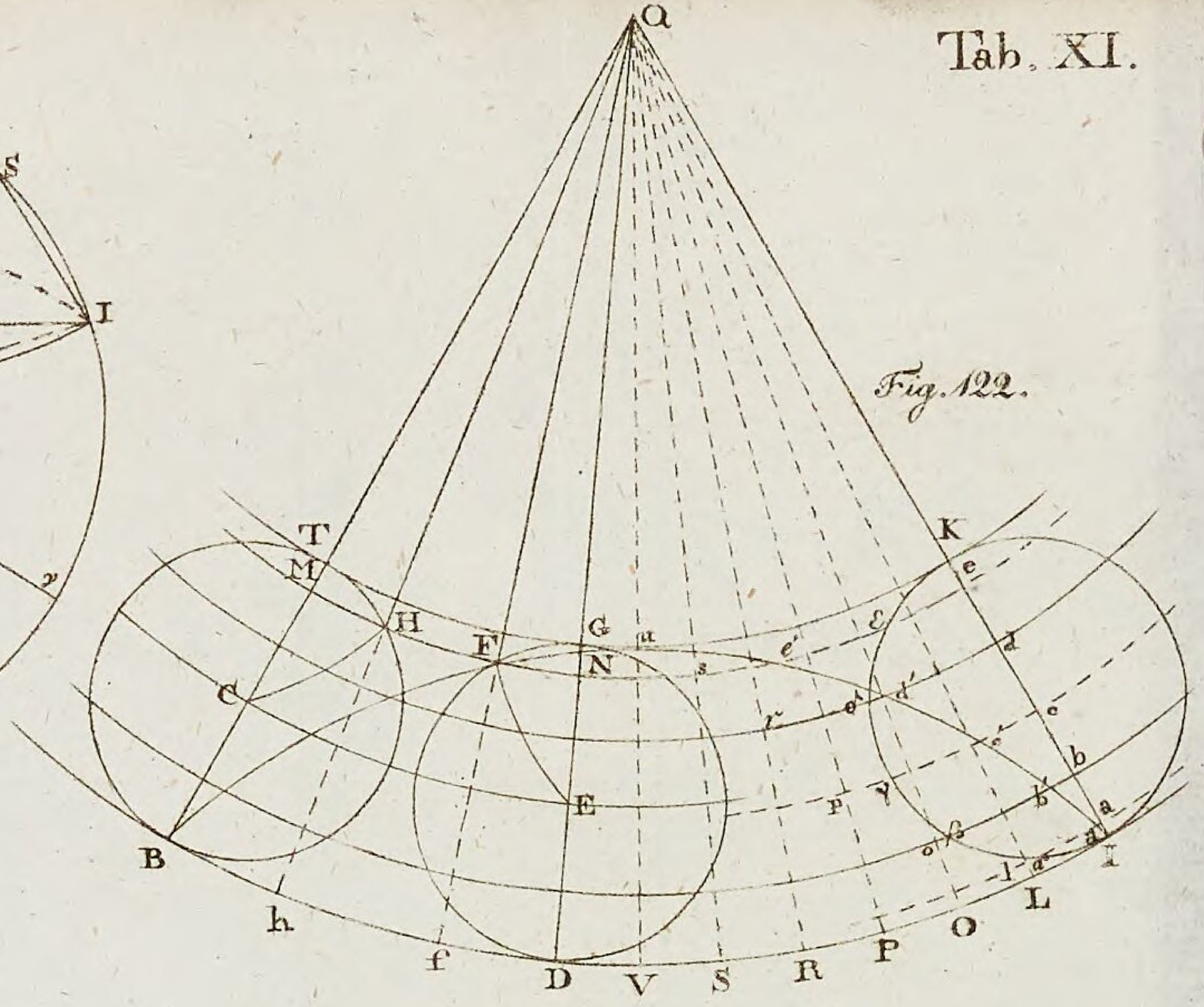

Fig. 122.

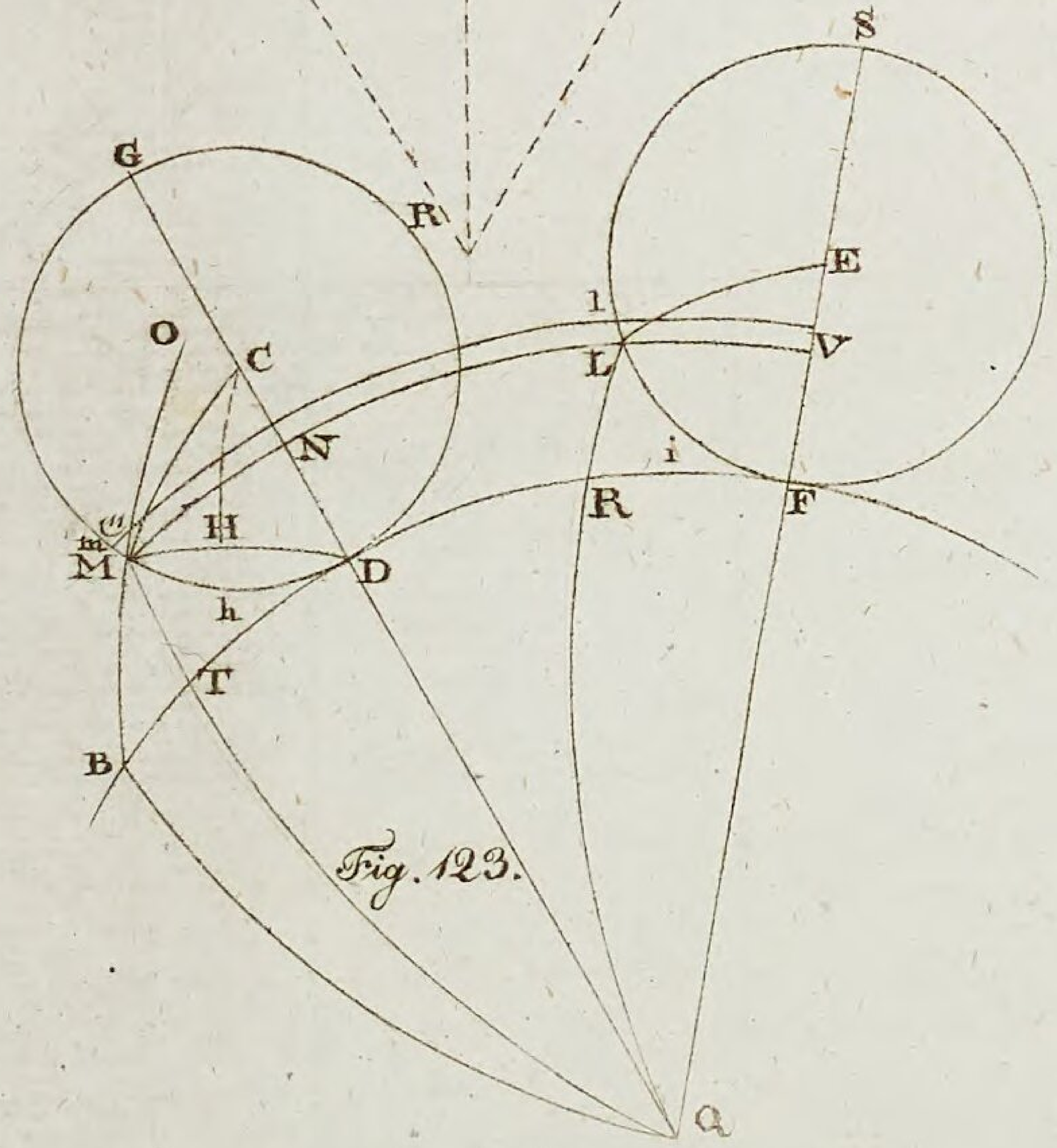

Fig. 123.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Magold, Maurus,

Mathematisches Lehrbuch zum Gebrauche öffentlicher Vorlesungen auf der churfürstl. baierischen Landes-Universität zu Landshut

Bd.: 3,2,Anhang

Landshut 1813

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.37(7#2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11739721-7